

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 10

Подстановки
(основные определения)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Вступление

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\rightarrow: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Все эти правила можно напрямую перенести в логику предикатов, сохранив их написание и смысл

Вступление

А как устроить правила преобразования формул, начинающихся с \forall и \exists ?

Пример: $\models \forall x P(x) \rightarrow P(c)$?

$\langle | \forall x P(x) \rightarrow P(c) \rangle$



избавляемся от импликации ($R \rightarrow$)

$\langle \forall x P(x) | P(c) \rangle$



подставляем константу c на место x

$\langle \forall x P(x), P(c) | P(c) \rangle$

Следует строго определить термин «**подставляем**»

Подстановки

Пусть заданы множество переменных Var и множество термов Term

Подстановка — это отображение $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Term}$

Область подстановки θ : $\text{Dom}_\theta = \{x \mid x \in \text{Var}, \theta(x) \neq x\}$

Подстановка **конечна**, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ — это конечная подстановка θ , для которой верно:

- ▶ $\text{Dom}_\theta = \{x_1, \dots, x_n\}$
- ▶ $\theta(x_i) = t_i, \quad 1 \leq i \leq n$

Пара x_i/t_i называется **связкой**

ε — это **тождественная (пустая)** подстановка: $\text{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение (терм или формула) логики предикатов и θ — подстановка

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$x\theta = \theta(x)$	$(x \in \text{Var})$
$c\theta = c$	$(c \in \text{Const})$
$f(t_1, \dots, t_n)\theta = f(t_1\theta, \dots, t_n\theta)$	$(f \in \text{Func}, t_1, \dots, t_n \in \text{Term})$
$P(t_1, \dots, t_n)\theta = P(t_1\theta, \dots, t_n\theta)$	$(P \in \text{Pred})$
$(\varphi \& \psi)\theta = (\varphi\theta \& \psi\theta)$	$(\varphi, \psi \in \text{Form})$
$(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta)$	
$(\varphi \rightarrow \psi)\theta = (\varphi\theta \rightarrow \psi\theta)$	
$(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta)$	
$(\forall x \ \varphi)\theta = (\forall x \ \varphi\theta')$	$(\theta'(x) = x;$
$(\exists x \ \varphi)\theta = (\exists x \ \varphi\theta')$	$\theta'(y) = \theta(y), \text{ если } y \neq x)$

Подстановки

Пример применения подстановки к формуле

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists y P(y) \vee R(u)$$
$$\theta = \{x/g(x, c), y/x, z/f(z)\}$$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в φ

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg R(\textcolor{green}{y})) \rightarrow R(\textcolor{green}{f}(\textcolor{green}{x})) \vee \exists y P(y) \vee R(\textcolor{green}{u})$$

Все выделенные вхождения заменяются согласно θ

$$\varphi\theta = \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(\textcolor{green}{x})) \rightarrow R(\textcolor{green}{f}(g(\textcolor{green}{x}, c))) \vee \exists y P(y) \vee R(\textcolor{green}{u})$$

Подстановки

При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность

Например:

$$\varphi(\textcolor{red}{x}) = \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(\textcolor{red}{x}, y)$$

«если у каждого есть дед, то у $\textcolor{red}{x}$ тоже есть дед»

Очевидно, что $\models \varphi(x)$

$$\varphi(x)\{x/y\} = \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(\textcolor{red}{y}, y)$$

«если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед»

Очевидно, что $\not\models \varphi(x)\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная x **свободна для терма t в формуле φ** , если ни одно свободное вхождение переменной x не лежит в областях действия кванторов, связывающих переменные из Var_t

Подстановка $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ — **правильная для формулы φ** , если для каждой связки x_i/t_i переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ

Например, для формулы $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(\textcolor{red}{x}, y)$

- ▶ подстановка $\{\textcolor{red}{x}/f(u, v)\}$ — правильная:
все вхождения u и v в подставляемый терм свободны
- ▶ подстановка $\{\textcolor{red}{x}/y\}$ — неправильная:
вхождение y в подставляемый терм оказывается связанным