Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 37

Хорновские логические программы:
переключательная лемма,
сильная полнота операционной семантики,
стандартное правило выбора подцели

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

$$\mathcal{R}_1 : \mathrm{p}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \leftarrow \mathrm{q}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y}); \quad \mathcal{R}_2 : \mathrm{q}(\mathbf{b}); \quad \mathcal{R}_3 : \mathrm{r}(\mathbf{c}); \quad \mathcal{R}_4 : \mathrm{s}(\mathbf{b});$$

Запросом $?\mathrm{p}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathtt{X})$ к этой программе порождаются, например, такие SLD-резолютивные вычисления, различающиеся тем, что в одном всегда выбирается первая подцель, а в другом — последняя:

$$\begin{array}{c}
?\mathrm{p}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathtt{X}) \\
\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_1 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{Y}'/\mathtt{Y}\} \\
?\mathrm{q}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathtt{X}) \\
\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_2 = \{\mathtt{X}/\mathbf{b}\} \\
?\mathrm{r}(\mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathbf{b}) \\
\mathcal{R}'_3, 1 \downarrow \theta_3 = \{\mathtt{Y}/\mathbf{c}\} \\
?\mathrm{s}(\mathbf{b}) \\
\mathcal{R}'_4, 1 \downarrow \theta_4 = \varepsilon \\
\square
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
?\mathrm{p}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathtt{X}) \\
\mathcal{R}'_4, 2 \downarrow \eta_1 = \{\mathtt{X}/\mathbf{b}\} \\
?\mathrm{p}(\mathbf{b}, \mathtt{Y}) \\
\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \eta_2 = \{\mathtt{X}'/\mathbf{b}, \mathtt{Y}'/\mathtt{Y}\} \\
?\mathrm{q}(\mathbf{b}), \mathrm{r}(\mathtt{Y}) \\
\mathcal{R}'_3, 2 \downarrow \eta_3 = \{\mathtt{Y}/\mathbf{c}\} \\
?\mathrm{q}(\mathbf{b}) \\
\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \eta_4 = \varepsilon \\
\square
\end{array}$$

Результаты этих вычислений:

$$(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4)|_{\{\mathtt{X},\mathtt{Y}\}} = \{\mathtt{X}/\mathbf{b}, \mathtt{Y}/\mathbf{c}\}, \qquad (\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)|_{\{\mathtt{X},\mathtt{Y}\}} = \{\mathtt{X}/\mathbf{b}, \mathtt{Y}/\mathbf{c}\} \text{ —}$$

оказались одинаковыми

А это случайное совпадение, или так бывает всегда?

Переключательная лемма

Для любого SLD-резолютивного вычисления

$$\begin{gathered}\mathcal{Q} = ?\,C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m\\ \mathcal{R}\!\downarrow\!\theta_1\\ ?(C_1, \dots, C_{i-1}, \mathcal{R}^-, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m)\theta_1\\ \mathcal{S}\!\downarrow\!\theta_2\\ \mathcal{Q}_1 = ?(C_1, \dots, C_{i-1}, \mathcal{R}^-, C_{i+1}, \dots, C_{j-1})\theta_1\theta_2, \mathcal{S}^-\theta_2, (C_{j+1}, \dots, C_m)\theta_1\theta_2\end{gathered}$$

существует SLD-резолютивное вычисление

$$\begin{gathered}\mathcal{Q} = ?\,C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m\\ \widetilde{\mathcal{S}}\!\downarrow\!\eta_1\\ ?(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, \widetilde{\mathcal{S}}^-, C_{j+1}, \dots, C_m)\eta_1\\ \widetilde{\mathcal{R}}\!\downarrow\!\eta_2\\ \mathcal{Q}_2 = ?(C_1, \dots, C_{i-1})\eta_1\eta_2, \widetilde{\mathcal{R}}^-\eta_2, (C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, \widetilde{\mathcal{S}}^-, C_{j+1}, \dots, C_m)\eta_1\eta_2,\end{gathered}$$

такое что

- $\widetilde{\mathcal{R}}$ **и** $\widetilde{\mathcal{S}}$ **— варианты правил** $\mathcal{R}$ **и** $\mathcal{S}$ **соответственно и**
- $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$ **и** $\theta_1\theta_2|_{\mathrm{Var}_\mathcal{Q}} = \eta_1\eta_2|_{\mathrm{Var}_\mathcal{Q}}$

как для соотношения $i < j$**, так и для** $j < i$

($\mathcal{R}^+$ и $\mathcal{R}^-$ — так будем обозначать соответственно заголовок и тело правила $\mathcal{R}$)

Переключательная лемма (доказательство)

Для технической простоты положим, что $i = 1$, $j = m = 2$ и тела $\mathcal{R}^-$ и $\mathcal{S}^-$ являются атомами (это не повлияет на общих ход рассуждений, но упростит иллюстрации)

То есть покажем, что для любого SLD-резолютивного вычисления

$$?A, B \xrightarrow{\mathcal{R},\theta_1} ?\mathcal{R}^-\theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S},\theta_2} \mathcal{Q}_1 = ?\mathcal{R}^-\theta_1\theta_2, \mathcal{S}^-\theta_2$$

существует SLD-резолютивное вычисление

$$?A, B \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{S}},\eta_1} ?A\eta_1, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1 \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{R}},\eta_2} \mathcal{Q}_2 = ?\widetilde{\mathcal{R}}^-\eta_2, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1\eta_2,$$

такое что $\widetilde{\mathcal{R}}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ — варианты правил $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1$

Рассмотрим произвольный вариант $\widetilde{\mathcal{S}}$ правила $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} = \widetilde{\mathcal{S}}\mu$), в котором нет переменных из $\mathrm{Var}_B \cup \mathrm{Var}_{B\theta_1} \cup \mathrm{Var}_{\mathcal{R}} \cup \mathrm{Var}_{\mathcal{R}^-\theta_1} \cup \mathrm{Dom}_{\theta_1}$

Так как $(\mathrm{Var}_{B\theta_1} \cup \mathrm{Var}_{\mathcal{R}^-\theta_1}) \cap (\mathrm{Var}_{\mathcal{S}} \cup \mathrm{Var}_{\widetilde{\mathcal{S}}}) = \emptyset$, то можно выбрать такое переименование μ, чтобы было верно $\mathrm{Dom}_\mu \cap (\mathrm{Var}_{B\theta_1} \cup \mathrm{Var}_{\mathcal{R}^-\theta_1}) = \emptyset$

По условию верно $(B\theta_1)\theta_2 = \mathcal{S}^+\theta_2$

Следовательно, $B\theta_1\mu\theta_2 = B\theta_1\theta_2 = \mathcal{S}^+\theta_2 = \widetilde{\mathcal{S}}^+\mu\theta_2 = \widetilde{\mathcal{S}}^+\theta_1\mu\theta_2$

Значит, $\theta_1\mu\theta_2$ — унификатор атомов B и $\widetilde{\mathcal{S}}^+$

Переключательная лемма (доказательство)

$$?A, B \xrightarrow{\mathcal{R},\theta_1} ?\mathcal{R}^-\theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S},\theta_2} \mathcal{Q}_1 = ?\mathcal{R}^-\theta_1\theta_2, \mathcal{S}^-\theta_2$$

$$\exists ?\ ?A, B \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{S}},\eta_1} ?A\eta_1, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1 \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{R}},\eta_2} \mathcal{Q}_2 = ?\widetilde{\mathcal{R}}^-\eta_2, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1\eta_2$$

$$\mathcal{S} = \widetilde{\mathcal{S}}\mu \qquad B\theta_1\mu\theta_2 = \widetilde{\mathcal{S}}^+\theta_1\mu\theta_2$$

По следствию из теоремы об унификации, существует и наиболее общий унификатор η_1 этих атомов ($\theta_1\mu\theta_2 = \eta_1\rho$), и для него

$$?A, B \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{S}},\eta_1} ?A\eta_1, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1$$

Так как $(\mathrm{Var}_B \cup \mathrm{Var}_{\widetilde{\mathcal{S}}}) \cap \mathrm{Var}_{\mathcal{R}} = \emptyset$, то, используя переименование переменных, можно выбрать такой наиболее общий унификатор η_1, для которого верно $\mathrm{Dom}_{\eta_1} \cap \mathrm{Var}_{\mathcal{R}} = \emptyset$

По условию верно $A\theta_1 = \mathcal{R}^+\theta_1$

Следовательно, верно и $A\eta_1\rho = A\theta_1\mu\theta_2 = \mathcal{R}^+\theta_1\mu\theta_2 = \mathcal{R}^+\eta_1\rho = \mathcal{R}^+\rho$

Значит, ρ — унификатор атомов $A\eta_1$ и $\mathcal{R}^+$, и существует их наиболее общий унификатор η_2 ($\rho = \eta_2\rho'$), и для него

$$?A, B \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{S}},\eta_1} ?A\eta_1, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1 \xrightarrow{\mathcal{R},\eta_2} ?\mathcal{R}^-\eta_2, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1\eta_2$$

Переключательная лемма (доказательство)

$$?A, B \xrightarrow{\mathcal{R},\theta_1} ?\mathcal{R}^-\theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S},\theta_2} \mathcal{Q}_1 = ?\mathcal{R}^-\theta_1\theta_2, \mathcal{S}^-\theta_2$$

$$\exists\ ?A, B \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{S}},\eta_1} ?A\eta_1, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1 \xrightarrow{\mathcal{R},\eta_2} \mathcal{Q}_2 = ?\mathcal{R}^-\eta_2, \widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1\eta_2$$

$$\mathcal{S} = \widetilde{\mathcal{S}}\mu \qquad B\theta_1\mu\theta_2 = \widetilde{\mathcal{S}}^+\theta_1\mu\theta_2$$

$$(A\eta_1)\eta_2\rho' = \mathcal{R}^+\eta_2\rho' \qquad \theta_1\mu\theta_2 = \eta_1\eta_2\rho'$$

При этом $\mathcal{R}^-\eta_1 = \mathcal{R}^-$, а значит,
$\mathcal{R}^-\theta_1\theta_2 = \mathcal{R}^-\theta_1\mu\theta_2 = \mathcal{R}^-\eta_1\eta_2\rho' = \mathcal{R}^-\eta_2\rho'$, то есть атом $\mathcal{R}^-\theta_1\theta_2$ — пример атома $\mathcal{R}^-\eta_2$

Кроме того, $\widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1\eta_2\rho' = \widetilde{\mathcal{S}}^-\theta_1\mu\theta_2 = \widetilde{\mathcal{S}}^-\mu\theta_2 = \mathcal{S}^-\theta_2$, то есть атом $\mathcal{S}^-\theta_2$ — пример атома $\widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1\eta_2$

Применяя те же рассуждения о взаимосвязи унификаторов от нижнего вычисления к верхнему, можно получить и обратное: $\mathcal{R}^-\eta_2$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^-\eta_1\eta_2\rho$ — примеры атомов $\mathcal{R}^-\theta_1\theta_2$ и $\mathcal{S}^-\theta_2$ соответственно

Если атомы являются примерами друг друга, то они (очевидно, что) являются вариантами друг друга, а значит, $\mathcal{Q}_1$ — вариант $\mathcal{Q}_2$: $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2\mu'$ для некоторого переименования μ'

Осталось заменить в нижнем вычислении унификатор η_2 на $\eta_2\mu'$ ▼

Сильная полнота операционной семантики

Правило выбора подцели — это отображение $\mathfrak{R}$, сопоставляющее каждому неуспешному вычислению $\mathfrak{S}$ номер подцели $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ его последнего запроса

$\mathfrak{R}$-вычисление — это SLD-резолютивное вычисление, в котором для каждого собственного префикса $\mathfrak{S}$ следующий запрос в вычислении — это резольвента для $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$-й подцели

Результаты $\mathfrak{R}$-вычислений называются $\mathfrak{R}$-вычислимыми ответами

Теорема (о сильной полноте операционной семантики ХЛП). Для любого правила выбора подцели $\mathfrak{R}$ и любого правильного ответа θ существует $\mathfrak{R}$-вычислимый ответ, являющийся обобщением θ

Доказательство.

По теореме о полноте операционной семантики ХЛП, существует SLD-вычислимый ответ η, являющийся обобщением θ

По определению SLD-вычислимого ответа, существует успешное вычисление с результатом η:

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

Сильная полнота операционной семантики

Доказательство.

$$\mathfrak{D} = (\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square)$$

Если $\mathfrak{D}$ является $\mathfrak{R}$-вычислением, то теорема доказана: η — $\mathfrak{R}$-вычислимый ответ, являющийся обобщением θ

Иначе в $\mathfrak{D}$ существует шаг i, такой что $\mathfrak{R}(\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_i) = m \neq k_i$

Так как $\mathfrak{D}$ завершается пустым запросом, то на некотором шаге j, $j > i$, резольвента строится для подцели, отвечающей m-й подцели запроса $\mathcal{Q}_i$

Используя переключательную лемму не более n раз, можно переупорядочить шаги вычисления от i-го до j-го так, чтобы

- на i-м шаге резольвента строилась для m-й подцели,
- запрос $\mathcal{Q}_{j+1}$ остался прежним и
- значение $(\eta_i \dots \eta_j)|_{\mathsf{Var}_{\mathcal{Q}_i}}$ осталось прежним

Применяя такое переупорядочивание не более n раз, можно последовательно устранить все шаги вычисления в $\mathfrak{D}$, на которых подцель выбирается «неправильно» относительно $\mathfrak{R}$, и тем самым перестроить $\mathfrak{D}$ в успешное $\mathfrak{R}$-вычисление с тем же результатом ▼

Стандартное правило выбора подцели

Согласно теореме о сильной полноте операционной семантики ХЛП, независимо от того, какое именно используется правило выбора подцели $\mathfrak{R}$, всегда есть возможность, придерживаясь правила $\mathfrak{R}$, получить всевозможные SLD-вычислимые ответы

Чтобы упростить анализ и использование ХЛП, как на практике, так и в теории зачастую используется стандартное правило выбора подцели: в каждом запросе всегда выбирается первая (самая левая) подцель

В изображении способа получения SLD-резольвенты $\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R},1,\theta} \mathcal{Q}_2$ согласно стандартному правилу номер подцели (1) будет опускаться: $\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R},\theta} \mathcal{Q}_2$