

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 12

Метод семантических таблиц
в логике предикатов:
корректность табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛП)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$:

$L\&, R\&, L\vee, R\vee, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ — таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\&, R\&, L\vee, R\vee, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg$

Доказательство корректности этих правил почти дословно переносится из доказательства той же леммы для логики высказываний — достаточно только

- ▶ начать с «Пусть \tilde{x}^n — все свободные переменные формул верхней таблицы»
- ▶ заменить «существует интерпретация \mathcal{I} » на «существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n »
- ▶ заменить (не)выполнимость формулы в интерпретации \mathcal{I} на (не)выполнимость ... на наборе предметов \tilde{d}^n

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛП)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$:

$L\&, R\&, L\vee, R\vee, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ — таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\forall$: $\frac{(\Gamma, \forall x \varphi \mid \Delta)}{(\Gamma, \forall x \varphi, \varphi\{x/t\} \mid \Delta)}$

(\Leftarrow) Очевидно, что если вычеркнуть « $\varphi\{x/t\}$ » из выполнимой (нижней) таблицы, то она (станет верхней) останется выполнимой

(\Rightarrow) Пусть верхняя таблица выполнима,

и \tilde{x}^n — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима \Leftrightarrow

существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n , такие что

- ▶ $\mathcal{I} \models \psi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \chi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- ▶ $\mathcal{I} \models (\forall x \varphi)[\tilde{d}^n]$

При этом $\mathcal{I} \models (\forall x \varphi)[\tilde{d}^n] \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi[t[\tilde{d}^n], \tilde{d}^n] \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi\{x/t\}[\tilde{d}^n]$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется **правильность** подстановки $\{x/t\}$ для φ ?

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛП)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$:

$L\&, R\&, L\vee, R\vee, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ — таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists$: $\frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{x/c\} \mid \Delta \rangle}$

(\Leftarrow) Очевидно, т.к. если $\mathcal{I} \models \varphi\{x/c\}[\tilde{d}^n]$, то $\mathcal{I} \models (\exists x \varphi)[\tilde{d}^n]$

(\Rightarrow) Пусть верхняя таблица выполнима, и \tilde{x}^n — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима \Leftrightarrow

существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n , такие что

- ▶ $\mathcal{I} \models \psi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \chi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- ▶ $\mathcal{I} \models (\exists x_0 \varphi)[\tilde{d}^n]$ — а значит, существует предмет d_0 , такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \tilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛП)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$:

$L\&, R\&, L\vee, R\vee, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ — таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists$: $\frac{(\Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta)}{(\Gamma, \varphi[x/c] \mid \Delta)}$

$$(\Rightarrow) \quad \psi \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n] \quad \chi \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \psi[\tilde{d}^n] \quad \mathcal{I} \models \varphi[d_0, \tilde{d}^n]$$

Рассмотрим интерпретацию \mathcal{J} ,

отличающуюся от \mathcal{I} только оценкой константы \mathbf{c} : $\bar{\mathbf{c}} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\{x/\mathbf{c}\})[\tilde{d}^n]$

Кроме того,

- ▶ $\mathcal{J} \models \psi[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{J} \not\models \chi[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что \mathbf{c} — «неиспользованная» константа?

Для правил $R\forall, R\exists$ доказательство аналогично ▼

Теорема (о корректности табличного вывода в ЛП)

Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима

Доказательство.

Следует из определения табличного вывода, леммы корректности правил табличного вывода и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие

Если для таблицы $\langle \cdot | \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

А верно ли утверждение в обратную сторону?