Лекция: Группы. Изоморфизм групп. Симметрическая группа перестановок. Подгруппы. Теорема Кэли.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по “Избранным вопросам дискретной математики”.
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Алгебраические структуры

Пусть S – произвольное множество.
Алгебраической операцией $*$ на множестве S называется отображение $*: S \times S \to S$.
Элемент $e \in S$ называется **нейтральным элементом** относительно операции $*$, если для каждого элемента $a \in S$ верно

$$a * e = e * a = a.$$

Теорема 1. *Нейтральный элемент (если он существует) единственен.*
Доказательство проведем от противного: пусть найдутся два нейтральных элемента $e' \in S$ и $e'' \in S$, $e' \neq e''$.
Тогда

$$e' = \underset{e' * e''}{e' * e''} = e''$$

$\square$

Алгебраические структуры

Для элемента $a \in S$ элемент $a' \in S$ называется **симметричным**, если

$$a * a' = a' * a = e,$$

где $e \in S$ – нейтральный элемент относительно операции $*$.
Теорема 2. *Симметричный элемент относительно ассоциативной операции (если он существует) единственен.*
Доказательство проведем от противного: пусть для некоторого элемента $a \in S$ найдутся два симметричных элемента $a' \in S$ и $a'' \in S$, $a' \neq a''$.
Тогда

$$a' = \overbrace{a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a''}^{a' * a * a''} = a''$$

□

Группы

Множество S с одной или несколькими введенными на нем операциями называется *алгебраической структурой*.
Структура $G = (S; *)$ (т.е. множество S с введенной на нем алгебраической операцией $*$) называется **группой**, если
1) операция $*$ ассоциативна, т.е. для любых элементов $a, b, c \in S$ верно

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

2) существует нейтральный элемент относительно операции $*$, т.е. найдется такой элемент $e \in S$, что для каждого элемента $a \in S$ верно

$$a * e = e * a = a;$$

3) для каждого элемента $a \in S$ найдется симметричный к нему элемент $a' \in S$, т.е. такой что

$$a * a' = a' * a = e.$$

Группы

Если для группы $G = (S; *)$ дополнительно выполнено, что
4) операция $*$ коммутативна, т.е. для любых элементов $a, b \in S$ верно

$$a * b = b * a,$$

то такая группа называется **коммутативной**, или **абелевой**.

Группы

Теорема 3 (правило сокращения).
Пусть $G = (S; *)$ – группа. Тогда если для некоторых элементов $a, b, c \in G$ верно

$$a * b = a * c \ (\textit{или}\ b * a = c * a),$$

то $b = c$.

Доказательство. Пусть элемент $a' \in G$ симметричен относительно операции $*$ к элементу $a \in G$. Элемент $a' \in G$ найдется, т.к. G – группа. Тогда

$$a * b = a * c$$
$$a' * a * b = a' * a * c$$
$$b = e * b = (a' * a) * b = (a' * a) * c = e * c = c$$

$\square$

Примеры групп

1. $S = \{e\}$; $e * e = e$ – тривиальная группа.

2. $S = \{e, a\}$; $x * e = e * x = x$, где $x = e, a$;
Чему равно $a * a =?$
Пусть $a * a = a$? Тогда $a * a = a * e$, и $a = e$?! – противоречие.
Получаем $a * a = e$.

3. $S = \{e, a, b\}$;

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Перечисленные группы абелевы.

Изоморфизм групп

Две группы $G = (S; *)$ и $G' = (S'; \times)$ называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение

$$\varphi : S \to S',$$

сохраняющее операцию, т.е. для любых элементов $a, b \in S$ верно

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \times \varphi(b).$$

Перечисленные в п.п.1-3 группы единственные с точностью до изоморфизма группы соответственно из одного, двух и трех элементов.

Порядок группы

Группа $G = (S; *)$ называется **конечной**, если в множестве S конечное число элементов.
Если группа $G = (S; *)$ конечна, то число элементов в множестве S называется ее **порядком** и обозначается $|G|$.

Пусть $G = (S; *)$ – группа с нейтральным элементом e.
Для элемента $a \in G$ наименьшее натуральное число n (если оно существует), такое что

$$\underbrace{a * a * \cdots * a}_{n} = e,$$

называется его **порядком**.

Конечные абелевы группы

Теорема 4. *Пусть $G = (S;*)$ – конечная абелева группа, и $e \in S$ – ее нейтральный элемент. Тогда для любого элемента $a \in S$ верно $\underbrace{a * \cdots * a}_{|G|} = a^{|G|} = e$.*

Доказательство. Пусть $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, и $a \in S$. Рассмотрим элементы группы

$$a * a_1, \ a * a_2, \ \ldots, \ a * a_n.$$

Все эти элементы различны (почему?). И их ровно n. Значит, здесь перечислены все элементы группы.
Поэтому, с учетом коммутативности и ассоциативности операции $*$, получаем:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} (a * a_i) = a^{|G|} \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

По правилу сокращения (теорема 3) получаем $a^{|G|} = e$. $\square$

Малая теорема Ферма

Следствие 4.1 (малая теорема Ферма). *Если p – простое число, то для каждого натурального числа a, $1 \leq a \leq (p-1)$, верно $a^{p-1} = 1 (\mathrm{mod}\ p)$.*

Доказательство. Пусть $S = \{1, 2, \ldots, (p-1)\}$, и $\cdot(\mathrm{mod}\ p)$ – операция умножения по модулю p чисел из S.

Несложно проверить, что $G = (S, \cdot(\mathrm{mod}\ p))$ – абелева группа порядка $(p-1)$ с нейтральным элементом $e = 1$.

Поэтому, по теореме 4 получаем, что $a^{p-1} = 1(mod\ p)$ для каждого $a \in S$.

$\square$

Терминология

Общая	Аддитивная	Мультипликативная
$*$ операция	$+$ сложение	$\cdot$ умножение
e нейтральный	0 ноль	1 единица
a' симметричный	$-a$ противоположный	a^{-1} обратный
$\underbrace{a * a * \cdots * a}_{n}$	na	a^n степень

Перестановки

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, где $n \geq 1$.
Перестановкой (n элементов) π называется взаимно однозначное отображение

$$\pi : N \to N.$$

Множество всех перестановок n элементов обозначим как S_n.

Задавать перестановки можно

1) таблицей: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ – в каждом столбце элемент в первой строке перестановкой переводится в элемент во второй строке;

2) строкой: $\pi = [2143]$ – в строке на i-м месте стоит элемент $\pi(i)$;

3) произведением циклов: $\pi = (12)(34)$ – каждая скобка является отдельным циклом, в каждой скобке следующий элемент получен из предыдущего применением перестановки, первый элемент получен из последнего применением перестановки.

Перестановки

Длиной цикла перестановки называется число элементов в нем.
Типом перестановки $\pi \in S_n$ называется вектор

$$\lambda(\pi) = (\lambda_1(\pi), \ldots, \lambda_n(\pi)),$$

где $\lambda_i(\pi)$ – число циклов длины i в перестановке π.
Заметим, что для любой перестановки $\pi \in S_n$ верно $\sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot \lambda_i(\pi) = n$ – каждый элемент принадлежит ровно одному циклу.
Для перестановки $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ее тип $\lambda(\pi) = (0, 2, 0, 0)$ – два цикла, каждый из которых содержит по два элемента.

Перестановки

Введем операцию **композиции** $\circ$ на множестве перестановок. **Композицией** (или **произведением**) перестановок π и ρ называется такая перестановка $\pi \circ \rho$, что для любого элемента $x \in N$ верно

$$(\pi \circ \rho)(x) = \rho(\pi(x)).$$

Перестановки

Теорема 5. При $n \geq 3$ операция композиции перестановок n элементов не является коммутативной.
Доказательство. Рассмотрим перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ и } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(\pi \circ \rho)(1) = 3,$$

а

$$(\rho \circ \pi)(1) = 1.$$

$\square$

Группа перестановок

Теорема 6. *Множество перестановок n элементов S_n с операцией композиции $\circ$ является группой.*

Доказательство. Проверим свойства группы.
1) ассоциативность операции $\circ$.
Пусть $\pi, \rho, \tau \in S_n$. Тогда для любого элемента $x \in N$

$$((\pi \circ \rho) \circ \tau)(x) = \tau((\pi \circ \rho)(x)) = \tau(\rho(\pi(x)))$$

и

$$(\pi \circ (\rho \circ \tau))(x) = (\rho \circ \tau)(\pi(x)) = \tau(\rho(\pi(x))).$$

Группа перестановок

Доказательство.
2) существование нейтрального элемента e.
Нейтральным элементом является перестановка

$$\pi_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

оставляющая каждый элемент на месте.

3) для каждого элемента π существование симметричного элемента π'.
Для перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

обратным (симметричным) элементом является перестановка

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(n) \\ 1 & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Группа перестановок

Доказательство.
Следовательно, $(S_n, \circ)$ – группа.

По теореме 4 при $n \geq 3$ эта группа не абелева.

$\square$

Группа всех перестановок n элементов с операцией композиции $\circ$ называется **симметрической группой перестановок** и обозначается S_n.

Теорема 7. *Порядок симметрической группы перестановок S_n равен $n!$, т.е.*

$$|S_n| = n!$$

Группа S_3

Рассмотрим симметрическую группу перестановок S_3.

$\pi_1 = e = [123] = (1)(2)(3)$ – нейтральный элемент (единица группы);
$\pi_2 = [132] = (1)(23)$ – элемент 1 остается на месте, элементы 2 и 3 меняются местами;
$\pi_3 = [321] = (13)(2)$ – элемент 2 остается на месте, элементы 1 и 3 меняются местами;
$\pi_4 = [213] = (12)(3)$ – элемент 3 остается на месте, элементы 1 и 2 меняются местами;
$\pi_5 = [231] = (123)$ – элементы 1, 2 и 3 сдвигаются по циклу по часовой стрелке;
$\pi_6 = [321] = (132)$ – элементы 1, 2 и 3 сдвигаются по циклу против часовой стрелки.

Порядок группы $|S_3| = 3! = 6$.

Подгруппы

Пусть $G = (S; *)$ – группа, и $T \subseteq S$.

Если $H = (T; *)$ является группой, то она называется **подгруппой** группы $G = (S; *)$.

Если при этом $T \neq \{e\}$ и $T \neq S$, то подгруппа называется **собственной**.

Подгруппы

Теорема 8. Пусть $G = (S; *)$ – группа, и $T \subseteq S$.
$H = (T; *)$ является группой тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in T$ верно, что $a * b' \in T$.

Доказательство.
$\Leftarrow$. Проверим аксиомы группы.
1) ассоциативность операции $*$ – т.к. G – группа;
2) существование нейтрального элемента e – если $a \in T$, то $a * a' = e \in T$;
3) для каждого элемента существование симметричного элемента – если $a \in T$, то $e * a' = a' \in T$;
алгебраичность операции $*$ для множества T – если $a, b \in T$, то по п. 3) $b' \in T$, и $a * (b')' = a * b \in T$.

$\square$

Подгруппы

Примеры подгрупп в группах.

1. Если $G = (S, \cdot)$ – мультипликативная группа, и $a \in G$ – элемент порядка n в ней, то множество

$$T = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n = 1\}$$

с операцией $\cdot$ образует мультипликативную подгруппу $H = (T; \cdot)$ порядка n группы $G = (S; \cdot)$.

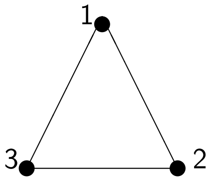
Мультипликативная группа называется **циклической**, если каждый из ее элементов является некоторой степенью выделенного элемента группы, который называется **образующим** элементом группы.

Группа с образующим элементом a обозначается как $< a >$.

Группа $H = (T; \cdot)$ из п. 1 является циклической подгруппой группы $G = (S; \cdot)$ с образующим элементом $a \in T$, т.е. $H =< a >$.

Подгруппы

2. Найдем группу H перестановок вершин правильного треугольника при его вращениях в плоскости, переводящих его в себя.
Рассмотрим правильный треугольник и будем поворачивать его по часовой стрелке:



поворот на угол 0: $\pi_1 = e = (1)(2)(3)$;
поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$: $\pi_2 = (123)$;
поворот на угол $\frac{4\pi}{3}$: $\pi_3 = (132)$.

Подгруппы

Получаем группу вращений вершин правильного треугольника в плоскости $H = (\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}; \circ)$, $|H| = 3$.

Она является подгруппой симметрической группы перестановок S_3.

Теорема Кэли

Теорема 9 (Кэли). *Каждая конечная группа изоморфна некоторой подходящей подгруппе симметрической группы перестановок* S_n.

Доказательство. Пусть $G = (S; *)$ – заданная конечная группа, $|G| = n$, и $S = \{g_1 = e, g_2, \ldots, g_n\}$.

Для каждого элемента $g_i \in G$ построим соответствующую ему перестановку $\pi_{g_i} \in S_n$ по правилу

$$\pi_{g_i} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_i * g_1 & g_i * g_2 & \cdots & g_i * g_n \end{pmatrix},$$

или

$$\pi_{g_i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi_{g_i}(1) & \pi_{g_i}(2) & \ldots & \pi_{g_i}(n) \end{pmatrix},$$

где $\pi_{g_i}(j) = k$, если $g_i * g_j = g_k$.

Теорема Кэли

Доказательство.
1. Сначала покажем, что такое определение задает перестановки.
От противного: пусть это не так, т.е. для некоторого $g_i \in G$ найдутся такие элементы $g_j \in G$ и $g_l \in G$, $g_j \neq g_l$, что

$$g_i * g_j = g_i * g_l.$$

Но тогда по правилу сокращения (теорема 3) верно $g_j = g_l$ – противоречие.

Обозначим полученное множество перестановок как T, $T \subseteq S_n$.

Теорема Кэли

Доказательство. 2. Теперь по теореме 8 покажем, что построенное множество перестановок с операцией композиции образует подгруппу симметрической группы перестановок S_n.
Выделим любые элементы $g_i, g_j \in G$, и рассмотрим перестановку $\pi_{g_i} \circ \pi_{g_j}^{-1}$.
Так как G – группа, то $g_j' \in G$. Тогда для любого элемента $x \in G$ верно

$$(\pi_{g_i} \circ \pi_{g_j}^{-1})(x) = \pi_{g_j}^{-1}(\pi_{g_i}(x)) = \pi_{g_j'}(\pi_{g_i}(x)) = \pi_{g_j' * g_i}(x).$$

Так как G – группа, то $g_j' * g_i = g_k \in G$, и $\pi_{g_j' * g_i} = \pi_{g_k}$.
Откуда $\pi_{g_i} \circ \pi_{g_j}^{-1} \in T$.

Следовательно, $H = (T; \circ)$ – подгруппа группы S_n.

Теорема Кэли

Доказательство. 3. Теперь покажем, что группы $G = (S; *)$ и $H = (T; \circ)$ изоморфны.
Рассмотрим отображение

$$\varphi : S \to T, \; g \mapsto \pi_{g'},$$

которое элемент $g \in S$ переводит в элемент $\varphi(g) = \pi_{g'} \in T$, где элемент g' симметричен элементу g в группе G.
1) Отображение φ взаимно однозначно.
2) Если $g_i, g_j \in G$, то

$$\varphi(g_i * g_j) = \pi_{(g_i * g_j)'} = \pi_{g_j' * g_i'} = \pi_{g_i'} \circ \pi_{g_j'} = \varphi(g_i) \circ \varphi(g_j).$$

Т.е. отображение φ сохраняет операцию.
Значит, оно является изоморфизмом групп $G = (S; *)$ и $H = (T; \circ)$. $\square$

Теорема Кэли

Для конечной группы $G = (S; *)$ построенная в доказательстве изоморфная ей подгруппа $H = (T; \circ)$ называется **левым регулярным представлением Кэли**.
Найдем левое регулярное представление Кэли для группы из трех элементов из рассмотренного ранее примера
$S = \{e, a, b\}$;

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

, или

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Тогда
$\pi_e = (1)(2)(3)$;
$\pi_a = (123)$;
$\pi_b = (132)$.
Получаем группу вращений H правильного треугольника в плоскости, являющуюся подгруппой группы S_3.

Цикловой индекс

Пусть $G = (S; \circ)$ – подгруппа симметрической группы перестановок S_n.

Цикловым индексом группы перестановок G называется многочлен n переменных

$$Z_G(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} t_1^{\lambda_1(\pi)} \cdot \ldots \cdot t_n^{\lambda_n(\pi)},$$

где $\lambda(\pi) = (\lambda_1(\pi), \ldots, \lambda_n(\pi))$ – тип перестановки π.

Цикловой индекс

1. Найдем цикловой индекс группы H вращений правильного треугольника в плоскости.

Для каждой перестановки ищем ее тип:

$\pi_1 = e = (1)(2)(3), \ \ \lambda(\pi_1) = (3,0,0);$

$\pi_2 = (123), \ \ \lambda(\pi_2) = (0,0,1);$

$\pi_3 = (132), \ \ \lambda(\pi_3) = (0,0,1).$

Замечая, что $|H| = 3$, получаем цикловой индекс

$$Z_H(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{3}(t_1^3 + 2t_3).$$

Цикловой индекс

2. Найдем цикловой индекс симметрической группы перестановок S_3.

Аналогично находим типы всех ее перестановок:

$\pi_1 = e = (1)(2)(3), \ \ \lambda(\pi_1) = (3,0,0)$;

$\pi_2 = (1)(23)$, $\pi_3 = (13)(2)$, $\pi_4 = (12)(3)$,

$\lambda(\pi_2) = \lambda(\pi_3) = \lambda(\pi_4) = (1,1,0)$;

$\pi_5 = (123)$, $\pi_6 = (132)$, $\ \lambda(\pi_5) = \lambda(\pi_6) = (0,0,1)$.

Порядок группы $|S_3| = 3! = 6$.

Поэтому ее цикловой индекс

$$Z_{S_3}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6}(t_1^3 + 3t_1t_2 + 2t_3).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить цикловой индекс группы перестановок вершин правильного треугольника при его вращениях в пространстве.

2. Построить цикловой индекс группы перестановок вершин квадрата при его вращениях в плоскости.

3. Построить цикловой индекс группы перестановок вершин правильного тетраэдра при его вращениях в пространстве.

4. Найти левое регулярное представление Кэли группы $G = (S; *)$, где $S = \{0, 1, 2, 3\}$, операция $*$ – это $+ \pmod 4$.

Литература к лекции

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988. Гл. 1, с. 12–23.

Конец лекции