Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы
$\to$ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 21

Монотонность и транзитивность
отношения логического следования

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Монотонность следования в ЛП

Для любых множеств предложений Γ, Δ и любого предложения φ верно:

$$\Gamma \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \cup \Delta \models \varphi$$

Доказательство

Пусть верно $\Gamma \models \varphi$

Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верна цепочка следований:

$\mathcal{I} \models \Gamma \cup \Delta$

$\Rightarrow$ (по определению модели)

для любой формулы ψ из $\Gamma \cup \Delta$ верно $\mathcal{I} \models \psi$

$\Rightarrow$ (т.к. $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$)

для любой формулы ψ из Γ верно $\mathcal{I} \models \psi$

$\Rightarrow$ (по определению модели)

$\mathcal{I} \models \Gamma$

$\Rightarrow$ (по определению логического следствия и т.к. $\Gamma \models \varphi$)

$\mathcal{I} \models \varphi$

Значит, любая модель $\Gamma \cup \Delta$ является моделью φ, то есть $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$ ▼

Монотонность $\lor$ относительно следования в ЛП

Для любого множества предложений Γ
и любых формул $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ верно:

$$\Gamma \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, (\varphi \lor \psi)$$

Доказательство

Пусть $\Gamma \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \varphi$

Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верна цепочка следований:

$\mathcal{I} \models \Gamma$

$\Rightarrow$ (по определению логического следствия и т.к. $\Gamma \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \varphi$)

$\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \varphi$

$\Rightarrow$ (по семантике $\forall$)

для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$

$\Rightarrow$ (по семантике $\lor$)

для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно $\mathcal{I} \models (\varphi \lor \psi)[\widetilde{d}^n]$

$\Rightarrow$ (по семантике $\forall$)

$\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, (\varphi \lor \psi)$

Значит, любая модель Γ является моделью $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, (\varphi \lor \psi)$ ▼

Транзитивность следования в ЛП

Для любого множества предложений Γ
и любых предложений $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$ **верно:**

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \models \psi_1 \\ \ldots \\ \Gamma \models \psi_k \\ \psi_1, \ldots, \psi_k \models \varphi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

Доказательство

Пусть верны все соотношения слева от «$\Rightarrow$»

Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верна цепочка следований:

$\mathcal{I} \models \Gamma$

$\Rightarrow$ (по определению логического следования)

$\mathcal{I} \models \psi_1$ и $\ldots$ и $\mathcal{I} \models \psi_k$

$\Rightarrow$ (по определению модели множества формул)

$\mathcal{I} \models \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$

$\Rightarrow$ (по определению логического следования)

$\mathcal{I} \models \varphi$ ▼