Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 35

Избрание лидера в кольце:
алгоритм Ле-Ланна,
алгоритм Ченя-Робертса

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Алгоритм Ле-Ланна

Это АИЛ* среди инициаторов в произвольном однонаправленном кольце с хотя бы двумя узлами

Вспомним, что для такого кольца обычно полагается, что узел p знает соседа,

- следующего в кольце, которому может отправлять сообщения: $next_p$
- предыдущего в кольце, от которого может принимать сообщения: $prev_p$

Будем считать, что в каналах поддерживается очерёдность сообщений

Общая схема алгоритма:

- Каждый инициатор отправляет пакет со своим идентификатором
- Каждый пакет проходит один полный круг по кольцу
- Получив свой пакет, инициатор имеет уверенность в том, что получил и пакеты других инициаторов, и выносит решение о лидере согласно текущим знаниям об идентификаторах

Алгоритм Ле-Ланна

Код последователя p:

1. В бесконечном цикле:
   - 1.1 $\mathrm{receive}_{prev_p}(\underline{\mathbf{pack}}, v)$
   - 1.2 $\mathrm{send}_{next_p}(\mathbf{pack}, v)$
   - 1.3 lost

Переменная инициатора p:

- $v_p : \mathcal{T}/p$

Код инициатора p:

1. $\mathrm{send}_{next_p}(\mathbf{pack}, p)$
2. $\mathrm{receive}_{prev_p}(\underline{\mathbf{pack}}, q)$
3. Пока $q \neq p$:
   - 3.1 $v_p := \min(v_p, q)$;
   - 3.2 $\mathrm{send}_{next_p}(\mathbf{pack}, q)$
   - 3.3 $\mathrm{receive}_{prev_p}(\underline{\mathbf{pack}}, q)$
4. Если $p = v_p$, то $\mathrm{elected}$, иначе lost

Алгоритм Ле-Ланна

Теорема. **Алгоритм Ле-Ланна является АИЛ* среди инициаторов с коммуникационной сложностью $O(n^2)$ и сложностью $O(n)$ по времени относительно числа узлов n**

Доказательство.

*Однородность** алгоритма очевидно следует из его устройства

Используя индукцию *и технику, аналогичную подробно разбиравшейся ранее*, можно показать, что:

- Каждый узел рано или поздно принимает пакет $(\mathbf{pack}, p)$ для всех инициаторов p, и для каждого p не более одного такого пакета
- Если расстояние до узла p от узла, следующего за инициатором q, меньше, чем от узла, следующего за инициатором r, то узел p получает пакет $(\mathbf{pack}, q)$ раньше пакета $(\mathbf{pack}, r)$

Алгоритм Ле-Ланна

Доказательство.

Коммуникационная сложность $O(n^2)$ следует из того, что в каждый канал для каждого p отправляется не более одного пакета $(\mathbf{pack}, p)$

Завершаемость следует из того, что отправляется конечное число пакетов

*Успешность выборов** следует из того, что если инициатор p принял пакет $(\mathbf{pack}, p)$, то, согласно очерёдности, до этого он обязательно принял пакеты $(\mathbf{pack}, q)$ для всех остальных инициаторов q, а значит, после этого приёма значение v_p — это наименьший идентификатор среди всех инициаторов

Сложность по времени следует из того, что пакет $(\mathbf{pack}, p)$ для заданного p отправляется последовательно во все каналы кольца и принимается узлом p спустя n единиц времени после отправки ▼

Алгоритм Ченя-Робертса

Алгоритм Ле-Ланна можно улучшить, если удалять из кольца пакеты тех узлов, про которые ясно, что они проиграют

То есть если не пересылать дальше пакет (**pack**, q), принятый узлом p, если $p < q$

Кроме того, если инициатор p принимает пакет (**pack**, q), такой что $q < p$, то он немедленно может признать себя проигравшим

Код последователя оставим без изменений по сравнению с алгоритмом Ле-Ланна

Код инициатора p:

1. send_{next_p}(**pack**, p)
2. Пока не leader:
   - 2.1 $\mathrm{receive}_{prev_p}$(<u>**pack**</u>, q)
   - 2.2 Если $q = p$: elected
   - 2.3 Иначе, если $q < p$:
     - 2.3.1 lost
     - 2.3.2 send_{next_p}(**pack**, q)

Алгоритм Ченя-Робертса

Теорема (Д.з. 1). Алгоритм Ченя-Робертса является АИЛ* среди инициаторов с коммуникационной сложностью $\Theta(n^2)$ и сложностью $O(n)$ по времени относительно числа узлов n

(В коммуникационной сложности написано не «O», а «Θ»: в худшем случае $o(n^2)$ сообщений недостаточно)

Теорема (Д.з. 2, непростое). Для избрания лидера* без последователей алгоритм Ченя-Робертса имеет коммуникационную сложность $O(n \log n)$ относительно числа узлов n в среднем для всех порядков расположения идентификаторов узлов в кольце

Алгоритм Ченя-Робертса

Д.з. 3.

- Существенна ли для корректности алгоритма Ченя-Робертса очерёдность передачи сообщений в каналах? Ответ аргументировать
- Для какого порядка идентификаторов в кольце заданного размера n суммарное число отправленных сообщений будет наименьшим, и сколько это сообщений?

Д.з. 4. Предложить псевдокод АИЛ*, получающегося из кольцевого волнового алгоритма применением эффекта угасания. Чем этот алгоритм отличается от алгоритма Ченя-Робертса?

Алгоритм Ченя-Робертса

В 1982 году Петерсон, и независимо — Долев, Клейв и Роде предложили АИЛ* в однонаправленном кольце, имеющий коммуникационную сложность $O(n \log n)$ не в среднем, а в худшем случае

Независимо Франклин предложил схожий алгоритм с такой же оценкой коммуникационной сложности для двунаправленных колец

Но обсуждать эти алгоритмы в лекциях не будем (можете считать это *трудными задачами*)