

Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 35

Избрание лидера в кольце:
алгоритм Ле-Ланна,
алгоритм Ченя-Робертса

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Алгоритм Ле-Ланна

Это алгоритм избрания лидера* среди инициаторов в произвольном однонаправленном кольце с хотя бы двумя узлами

Вспомним, что для такого кольца обычно полагается, что узел p знает соседа,

- ▶ следующего в кольце, которому может отправлять сообщения:
 $next_p$
- ▶ предыдущего в кольце, от которого может принимать сообщения:
 $prev_p$

Будем считать, что в каналах поддерживается **очерёдность сообщений**

Общая схема алгоритма:

- ▶ Каждый инициатор отправляет пакет со своим идентификатором
- ▶ Каждый пакет проходит один полный круг по кольцу
- ▶ Получив свой пакет, инициатор имеет уверенность в том, что получил и пакеты других инициаторов, и выносит решение о лидере согласно текущим знаниям об идентификаторах

Алгоритм Ле-Ланна

Код последователя p :

1. В бесконечном цикле:
 - 1.1 $\text{receive}_{\text{prev}_p}(\mathbf{pack}, v)$
 - 1.2 $\text{send}_{\text{next}_p}(\mathbf{pack}, v)$
 - 1.3 lost

Переменная инициатора p :

- ▶ $v_p : \mathcal{T} = p$

Код инициатора p :

1. $\text{send}_{\text{next}_p}(\mathbf{pack}, p)$
2. $\text{receive}_{\text{prev}_p}(\mathbf{pack}, q)$
3. Пока $q \neq p$:
 - 3.1 $v_p := \min(v_p, q)$;
 - 3.2 $\text{send}_{\text{next}_p}(\mathbf{pack}, q)$
 - 3.3 $\text{receive}_{\text{prev}_p}(\mathbf{pack}, q)$
4. Если $p = v_p$, то leader, иначе lost

Алгоритм Ле-Ланна

Теорема. Алгоритм Ле-Ланна является алгоритмом избрания лидера* среди инициаторов с коммуникационной сложностью $O(n^2)$ и сложностью $O(n)$ по времени относительно числа узлов n

Доказательство.

*Однородность** алгоритма очевидно следует из его устройства

Используя индукцию и технику, аналогичную подробно разбиравшейся ранее, можно показать, что:

- ▶ Каждый узел рано или поздно принимает пакет (**pack**, p) для всех инициаторов p , и для каждого p не более одного такого пакета
- ▶ Если расстояние до узла p от узла, следующего за инициатором q , меньше, чем от узла, следующего за инициатором r , то узел p получает пакет (**pack**, q) раньше пакета (**pack**, r)

Алгоритм Ле-Ланна

Доказательство.

Коммуникационная сложность $O(n^2)$ следует из того, что в каждый канал для каждого p отправляется не более одного пакета (**pack**, p)

Завершаемость следует из того, что набор отправляемых пакетов конечен

*Успешность выборов** следует из того, что если инициатор p принял пакет (**pack**, p), то, согласно **очерёдности**, до этого он обязательно принял пакеты (**pack**, q) для всех остальных инициаторов q , а значит, после этого приёма значение v_p — это наименьший идентификатор среди всех инициаторов

Сложность по времени следует из того, что пакет (**pack**, p) для заданного p отправляется последовательно во все каналы кольца, а значит, принимается узлом p спустя N единиц времени после отправки ▼

Алгоритм Ченя-Робертса

Алгоритм Ле-Ланна можно улучшить, если удалять из кольца пакеты тех узлов, про которые ясно, что они проиграют

То есть если не пересылать дальше пакет (**pack**, q), принятый узлом p , если $p < q$

Кроме того, если инициатор p принимает пакет (**pack**, q), такой что $q < p$, то он немедленно может признать себя проигравшим

Код последователя оставим без изменений по сравнению с алгоритмом Ле-Ланна

Код инициатора p :

1. $\text{send}_{\text{next}_p}(\mathbf{pack}, p)$
2. Пока не выполнено leader:
 - 2.1 $\text{receive}_{\text{prev}_p}(\mathbf{pack}, q)$
 - 2.2 Если $q = p$: leader
 - 2.3 Иначе, если $q < p$:
 - 2.3.1 lost
 - 2.3.2 $\text{send}_{\text{next}_p}(\mathbf{pack}, q)$

Алгоритм Ченя-Робертса

Теорема (Д.з. 1). Алгоритм Ченя-Робертса является алгоритмом избрания лидера* среди инициаторов с коммуникационной сложностью $\Theta(n^2)$ и сложностью $O(n)$ по времени относительно числа узлов n

(В коммуникационной сложности написано не « O », а « Θ »: в худшем случае $o(n^2)$ сообщений недостаточно)

Теорема (Д.з. 2, непростое). Если все узлы являются инициаторами, то алгоритм Ченя-Робертса имеет коммуникационную сложность $O(N \log N)$ **в среднем** относительно всех порядков расположения идентификаторов узлов в кольце

Алгоритм Ченя-Робертса

Д.з. 3.

- ▶ Существенна ли для корректности алгоритма Ченя-Робертса очерёдность передачи сообщений в каналах? Ответ аргументировать
- ▶ Для какого порядка идентификаторов в кольце заданного размера n суммарное число отправленных сообщений будет наименьшим, и сколько это сообщений?

Д.з. 4. Предложить псевдокод алгоритма избрания лидера*, получающегося из кольцевого волнового алгоритма применением эффекта угасания. Чем этот алгоритм отличается от алгоритма Ченя-Робертса?

Алгоритм Ченя-Робертса

В 1982 году Петерсон, и независимо — Долев, Клейв и Роде предложили алгоритм избрания лидера в однонаправленном кольце, имеющий коммуникационную сложность $O(N \log N)$ не в среднем, а в худшем случае

Независимо Франклин предложил схожий алгоритм с такой же оценкой коммуникационной сложности для двунаправленных колец

Но обсуждать эти алгоритмы в лекциях не будем (можете считать это *трудными задачами*)