

Упражнения по теме “натуральные исчисления”

Аксиомы и правила вывода натуральных исчислений

Аксиомы (в исчислениях высказываний и предикатов):

Основная:

$$\mathfrak{A} : \Gamma \cup \{A\} \vdash A$$

Производная:

$$\mathfrak{A}_\vee : \Gamma \vdash A \vee \neg A$$

Основные правила введения и удаления логических связок (в исчислениях высказываний и предикатов):

$$\begin{array}{l}
 R_{\&}^+ : \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \quad R_{\vee}^{+1} : \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad R_{\vee}^{+2} : \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \\
 R_{\&}^{-1} : \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \quad R_{\&}^{-2} : \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B} \quad R_{\vee}^- : \frac{\Gamma \vdash A \vee B, \Gamma \cup \{A\} \vdash C, \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C} \\
 R_{\rightarrow}^+ : \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad R_{\neg}^+ : \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \\
 R_{\rightarrow}^- : \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \quad R_{\neg}^- : \frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A}
 \end{array}$$

Основные правила введения и удаления кванторов (в исчислении предикатов):

$$R_{\forall}^+ : \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}$$

Ограничение:

x не является свободной переменной формул из Γ

$$R_{\exists}^+ : \frac{\Gamma \vdash A \{x/t\}}{\Gamma \vdash \exists x A}$$

Ограничение:

подстановка $\{x/t\}$ правильна для A

$$R_{\forall}^- : \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A \{x/t\}}$$

Ограничение:

подстановка $\{x/t\}$ правильна для A

$$R_{\exists}^- : \frac{\Gamma \vdash \exists x A, \Gamma \cup \{A \{x/y\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Ограничение:

подстановка $\{x/y\}$ правильна для A , и y — переменная, не являющаяся свободной в формулах из $\Gamma \cup \{\exists x A, B\}$

Производные правила (в исчислениях высказываний и предикатов):

$$R_m : \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \cup \Delta \vdash A} \quad R_a : \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

Другие правила и аксиомы применять при решении задач запрещено

Упражнение 1

Предложить доказательство общезначимости заданной формулы в натуральном исчислении высказываний:

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $A \& \neg A \rightarrow B$ | 5. $A \& B \rightarrow B \& A$ | 9. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \& \neg B$ |
| 2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ | 6. $A \vee B \rightarrow B \vee A$ | 10. $\neg A \& \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$ |
| 3. $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$ | 7. $A \& (B \vee C) \rightarrow A \& B \vee A \& C$ | 11. $\neg(A \& B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$ |
| 4. $\neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$ | 8. $A \& B \vee A \& C \rightarrow A \& (B \vee C)$ | 12. $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \& B)$ |

Упражнение 2

Предложить доказательство общезначимости заданной формулы в натуральном исчислении предикатов:

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall x P(x) \rightarrow P(c)$ | 7. $\forall x P(x) \& \forall x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \& Q(x))$ |
| 2. $P(c) \& \forall x (P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow P(f(f(f(c))))$ | 8. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ |
| 3. $\forall x P(x, x) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ | 9. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$ |
| 4. $\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ | 10. $\exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$ |
| 5. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$ | 11. $\forall x P(x) \rightarrow \neg \exists x \neg P(x)$ |
| 6. $\forall x (P(x) \& Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \& \forall x Q(x)$ | 12. $\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$ |