

Упражнения по исчислениям предикатов

Натуральное исчисление

Правила вывода:

$$R_{\&}^+ : \frac{A, B}{A \& B} \quad R_{\vee}^+ : \frac{A}{A \vee B}, \frac{B}{A \vee B} \quad R_{\rightarrow}^+ : \frac{A \vdash B}{A \rightarrow B} \quad R_{\neg}^+ : \frac{A \vdash B \& \neg B}{\neg A}$$

$$R_{\&}^- : \frac{A \& B}{A}, \frac{A \& B}{B} \quad R_{\vee}^- : \frac{A \vee B, A \vdash C, B \vdash C}{C} \quad R_{\rightarrow}^- : \frac{A \rightarrow B, A}{B} \quad R_{\neg}^- : \frac{\neg \neg A}{A}$$

$$R_{\forall}^+ : \frac{A}{\forall x A}, \text{ если } x \text{ не является свободной переменной допущений}$$

$$R_{\forall}^- : \frac{\forall x A}{A \{x/t\}}, \text{ если переменная } x \text{ свободна для терма } t \text{ в } A$$

$$R_{\exists}^+ : \frac{A \{x/t\}}{\exists x A}, \text{ если переменная } x \text{ свободна для терма } t \text{ в } A$$

$$R_{\exists}^- : \frac{\exists x A, A \{x/y\} \vdash B}{B}, \text{ если переменная } y \text{ не содержится в } A, B \text{ и не является свободной переменной допущений}$$

Упражнение 1

Предложить вывод формулы в натуральном исчислении:

1. $\forall x P(x) \rightarrow P(c)$
2. $A \vee \neg A$ для произвольной формулы A
3. $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \& B)$ для произвольных формул A, B
4. $\neg(A \& B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$ для произвольных формул A, B
5. $A \& (B \vee C) \rightarrow A \& B \vee A \& C$ для произвольных формул A, B, C
6. $A \& B \vee A \& C \rightarrow A \& (B \vee C)$ для произвольных формул A, B, C
7. $\forall x P(x, x) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$
8. $P(c) \& \forall x (P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow P(f(f(f(c))))$
9. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
10. $\forall x (P(x) \& Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \& \forall x Q(x)$
11. $\forall x P(x) \& \forall x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \& Q(x))$
12. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
13. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
14. $\exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$
15. $\forall x P(x) \rightarrow \neg \exists x \neg P(x)$
16. $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$
17. $\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$

Арифметика Пеано

Схемы аксиом:

$$A_{\times 0} : \quad \forall x (x \times \mathbf{0} = \mathbf{0})$$

$$A_{\times s} : \quad \forall x \forall y (x \times s(y) = x \times y + x)$$

$$A_{+0} : \quad \forall x (x + \mathbf{0} = x)$$

$$A_{+s} : \quad \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$$

$$A_{r=} : \quad \forall x (x = x)$$

$$A_{s=} : \quad \forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (y = x))$$

$$A_{t=} : \quad \forall x \forall y \forall z ((x = y) \& (y = z) \rightarrow (x = z))$$

$$A_{=+s} : \quad \forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (s(x) = s(y)))$$

$$A_{=-s} : \quad \forall x \forall y ((s(x) = s(y)) \rightarrow (x = y))$$

$$A_0 : \quad \forall x \neg(\mathbf{0} = s(x))$$

$$A_{ind} : \quad \varphi \{x/\mathbf{0}\} \& \forall x (\varphi \rightarrow \varphi \{x/s(x)\}) \rightarrow \forall x \varphi$$

\mathbf{n} — сокращение для $\underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\dots \mathbf{S}(\mathbf{0}) \dots))}_{\mathbf{n} \text{ раз}}, n \in \mathbb{N}$

Упражнение 2

Предложить вывод формулы в натуральном исчислении, расширенном аксиомами арифметики Пеано:

1. $\mathbf{2} + \mathbf{0} = \mathbf{2}$
2. $\mathbf{2} + \mathbf{1} = \mathbf{3}$
3. $\mathbf{2} + \mathbf{2} = \mathbf{4}$
4. $\mathbf{2} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{2}$
6. $\mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$
7. $\exists y (x = \mathbf{2} \times y) \rightarrow \exists y (s(x) = \mathbf{2} \times y + \mathbf{1})$
8. $\forall x (x = \mathbf{0} \vee \exists y (x = s(y)))$