

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 27

Стратегии резолютивного вывода

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

В методе резолюций, как и в методе семантических таблиц, есть свобода выбора (*таблиц; термов; дизъюнктов*), позволяющая строить существенно различающиеся выводы

Например: (*переименование дизъюнктов опущено для наглядности*)

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 : \neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \varphi_2 : R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \varphi_3 : Q(x, x) \\ \varphi_4 : \neg Q(x, y) \vee \neg Q(y, z) \vee Q(x, z) \\ \varphi_5 : \neg R(x, y) \vee Q(x, y) \end{array} \right\}$$

Вывод из S можно устроить, например, так:

$$\begin{array}{c} \varphi_5 \qquad \varphi_2 \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ \neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \neg R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \varphi_4 \qquad \varphi_3 \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ \neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \neg Q(\mathbf{a}, y) \vee \neg Q(y, \mathbf{b}) \rightarrow \neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg Q(x, y) \vee \neg Q(y, z) \vee Q(x, z) \rightarrow \begin{array}{l} \neg Q(x, y) \vee \neg Q(y, z) \vee \\ \neg Q(x, y') \vee \neg Q(y', z) \vee Q(x, z) \end{array} \rightarrow \infty \\ \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \qquad \qquad \qquad \varphi_4 \end{array}$$

Стратегии резолютивного вывода

От способа применения правил резолютивного вывода существенно зависит возможность вывести $\square$

Стратегия резолютивного вывода — это набор ограничений на выбор дизъюнктов, к которым применяются правила при построении вывода

Стратегия резолютивного вывода называется **полной**, если для любой невыполнимой системы дизъюнктов S существует вывод $\square$ из S , построенный согласно этой стратегии

Например, стратегия, никак не ограничивающая выбор дизъюнктов, полна — но существуют и более «эффективные» полные стратегии

Семантическая резолюция

По своему усмотрению выберем интерпретацию $\mathcal{I}$

$\mathcal{I}$ -резолюция — это стратегия с одним (следующим) ограничением:

Для дизъюнктов D_1, D_2 , к которым применяется правило резолюции, должно быть верно $\mathcal{I} \models D_1$ и $\mathcal{I} \not\models D_2$

Резолютивный вывод, построенный согласно $\mathcal{I}$ -резолюции, называется **$\mathcal{I}$ -резолютивным выводом**

Пример: для эрбрановской интерпретации $\mathcal{I} = \emptyset$ и системы

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee C, \quad B \vee C, \quad \neg C\}$$

один из $\mathcal{I}$ -резолютивных выводов выглядит так:

$$(\mathcal{I} \models D_i)$$

$$D_1 = \neg A \vee \neg B \vee C$$

$$D_2 = \neg C$$

$$(\mathcal{I} \not\models D_i)$$

$$D_3 = A \vee C$$

$$D_4 = B \vee C$$

$$D_1, D_3 \rightarrow D_5 = \neg B \vee C \vee C$$

$$D_5 \rightarrow D_6 = \neg B \vee C$$

$$D_1, D_4 \rightarrow D_7 = \neg A \vee C \vee C$$

$$D_7 \rightarrow D_8 = \neg A \vee C$$

$$D_2, D_3 \rightarrow D_9 = A$$

$$D_2, D_4 \rightarrow D_{10} = B$$

$$D_6, D_{10} \rightarrow D_{11} = C$$

$$D_2, D_{11} \rightarrow D_{12} = \square$$

Семантическая резолюция

Теорема (о полноте семантической резолюции)

$\mathcal{I}$ -резолюция полна для любой интерпретации $\mathcal{I}$

Иными словами, для любой невыполнимой системы дизъюнктов S и любой интерпретации $\mathcal{I}$ существует $\mathcal{I}$ -резолютивный вывод $\square$ из S

Доказательство приводить не будем, отметив только, что оно следует предложенной ранее схеме обоснования полноты резолютивного вывода, и что существенные исправления требуется внести только в лемму об основных дизъюнктах

Входная резолюция

Входной резолютивный вывод из системы S ,
инициированный дизъюнктом D этой системы, устроен так:

- ▶ Нечётные дизъюнкты вывода (при нумерации с единицы) называются **центральными**, чётные — **боковыми**
- ▶ Первый дизъюнкт вывода — это D
- ▶ Все боковые дизъюнкты являются вариантами дизъюнктов из S
- ▶ Каждый центральный дизъюнкт, кроме первого, — это резольвента двух предшествующих дизъюнктов

Проще говоря, во входном выводе каждый следующий центральный дизъюнкт — это резольвента предыдущего центрального дизъюнкта и варианта дизъюнкта исходной системы

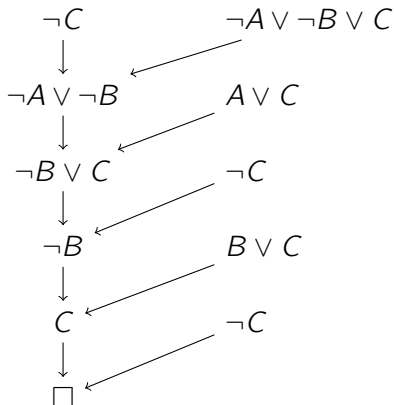
Входная резолюция — это стратегия, согласно которой разрешено строить любые входные резолютивные выводы и только их

Входная резолюция

Пример: один из входных резолютивных выводов из системы

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee C, \quad B \vee C, \quad \neg C\}$$

устроен так:



Входная резолюция

Теорема (о неполноте входной резолюции)

Входная резолюция неполна

Доказательство

Вот пример системы,
из которой не существует входного резолютивного вывода $\square$:

$$S = \{A \vee A, \quad \neg A \vee \neg A\}$$

При построении входного вывода
запрещено применять **правило склейки**, а значит,
все дизъюнкты входного вывода из S содержат ровно две литеры ▼

Запрет на применение правила склейки —
не единственная причина неполноты входной резолюции

Даже если добавить возможность склеивать дизъюнкт перед
построением резольвенты, то (*как можно показать полным перебором*)
невозможно вывести $\square$, например, из невыполнимой системы

$$\{A \vee C, \quad \neg A \vee C, \quad B \vee \neg C, \quad \neg B \vee \neg C\}$$