Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 26

Иллюстрация полноты резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Ранее с использованием метода резолюций
была доказана общезначимость формулы
$$\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x)\to\exists y\ R(x,y))\to\exists y\ R(x,y))$$

Это обоснование основывалось на резолютивном выводе $\square$
из системы дизъюнктов
$$S=\{P(x),\quad \neg P(\mathbf{f}(x))\vee R(x,\mathbf{g}(x)),\quad \neg R(x,u)\}\},$$
соответствующей этой формуле

Проиллюстрируем схему обоснования полноты метода резолюций
на этой системе

Известно, что эта система S невыполнима

По теореме Эрбрана, существует конечное невыполнимое множество
основных примеров дизъюнктов этой системы

Например, невыполнимо такое множество примеров:
$$\mathcal{G}=\{P(\mathbf{f}(\mathbf{c})),\quad \neg P(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\vee R(\mathbf{c},\mathbf{g}(\mathbf{c})),\quad \neg R(\mathbf{c},\mathbf{g}(\mathbf{c}))\}$$

$$S = \{P(x), \quad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \quad \neg R(x, u)\}\},$$
$$\mathcal{G} = \{P(\mathbf{f}(\mathbf{c})), \quad \neg P(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee R(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})), \quad \neg R(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c}))\}$$

Действуя согласно лемме об основных дизъюнктах, построим вывод $\square$ из $\mathcal{G}$:

- Постро́им все резольвенты относительно $P(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$:

$$\begin{tikzcd} P(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \arrow[dr] & & \neg P(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee R(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \arrow[dl] \\ & R(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) & \end{tikzcd}$$

- Для построенных резольвент и дизъюнктов, не содержащих $P(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$, постро́им все резольвенты относительно $R(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c}))$:

$$\begin{tikzcd} R(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \arrow[dr] & & \neg R(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \arrow[dl] \\ & \square & \end{tikzcd}$$

$$S = \{\mathrm{P}(\mathrm{x}),\quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})),\quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u})\}\},$$
$$\mathcal{G} = \{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})),\quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})),\quad \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c}))\}$$

Получен такой резолютивный вывод $\square$ из $\mathcal{G}$:

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \qquad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \qquad \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \qquad \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \qquad \square$$

Используя лемму о подъёме, «поднимем» этот вывод до вывода из S:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1) \qquad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) \qquad \mathrm{R}(\mathrm{x}_3, \mathbf{g}(\mathrm{x}_3)) \qquad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}_4, \mathrm{u}_4) \qquad \square$$

$$S = \{\mathrm{P}(\mathrm{x}), \quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})), \quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u})\}\},$$
$$\mathcal{G} = \{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})), \quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})), \quad \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c}))\}$$

В этой схеме обоснования полноты «*неконструктивен*» только первый этап: не говорится, как можно эффективно построить конечное невыполнимое множество $\mathcal{G}$ основных примеров дизъюнктов невыполнимой системы S

Можно представить себе это построение, например, так:

- Будем бесконечно строить (перебирать) **всевозможные** конечные множества $\mathcal{G}$ основных примеров дизъюнктов исходной системы S
- Построив очередное множество $\mathcal{G}$, попытаемся вывести из него $\square$
- Рано или поздно хотя бы из одного построенного $\mathcal{G}$ удастся вывести $\square$ — «поднимем» этот вывод, получив вывод $\square$ из S

А есть ли более эффективный способ вывода $\square$ из произвольной невыполнимой системы дизъюнктов?