

## 1 Семинирское занятие. Формальные грамматики. Часть 2.

**Задача 1.** Постройте детерминированный магазинный автомат, который распознает контекстно-свободный язык, описанный грамматикой с множеством правил

$$S \rightarrow aB|bA \quad A \rightarrow aS|bAA|a \quad B \rightarrow bS|aBB|b,$$

**Задача 2.** Примените алгоритм Кока-Касами-Янгера для проверки принадлежности слова языку порожденному КС-грамматикой со следующими правилами:

1.  $w = aab, \Gamma = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow a, B \rightarrow AB|b\}$ .
2.  $w = abababa, \Gamma = \{S \rightarrow ST|a, T \rightarrow BS, B \rightarrow b\}$ .

**Задача 3.** Выясните, приведя грамматику к нормальной форме Хомского и применения алгоритм Кока-Касами-Янгера, какие из приведенных ниже слов

1.  $aabaab$ ,
2.  $aaaaba$ ,
3.  $aabbaa$ ,
4.  $abaaba$

принадлежат языку, который порождается следующей КС-грамматикой

$$S \rightarrow ABS|AB \quad A \rightarrow aA|a \quad B \rightarrow bA .$$

**Задача 4.** Докажите, что КС-грамматика с множеством правил  $S \rightarrow bS|Sa|aSb|\varepsilon$  порождает регулярный язык.

**Задача 5.** Какие из приведенных ниже языков являются а) регулярными, б) контекстно-свободными, с) рекурсивными.

1.  $\{w : w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ имеет одинаковое число вхождений каждой буквы}\};$
2.  $\{a^n b^m : n \neq m\};$
3.  $\{a^n : n = 2^m, m \geq 0\};$
4.  $\{w : w - \text{двоичное представление числа } 2^m, m \geq 0\};$
5.  $\{a^n b^m c^k : (n, m, k \geq 1) \wedge (2n = 3k \vee 5k = 7m)\};$
6.  $\{a^n b^m c^k : (n, m, k \geq 1) \wedge 2n = 3k \wedge 5k = 7m\};$
7.  $\{a^n b^m c^k : n, m, k \geq 1, n + k = m\};$
8.  $\{a^n b^m c^k : n \geq m \geq k \geq 0\};$

9.  $\{a^n b^m c^k d^\ell : n, m, k, \ell \geq 1, n = m, k = \ell\};$
10.  $\{a^n b^m c^k d^\ell : n, m, k, \ell \geq 1, m = k, m = \ell\};$
11.  $\{a^n b^m c^k d^\ell : n, m, k, \ell \geq 1, n = \ell, k = m\};$
12.  $\{a^n b^m c^k d^\ell : n, m, k, \ell \geq 1, 2n = 3k, 5k = 7\ell\};$
13.  $\{a^n b^m c^k d^\ell : n, m, k, \ell \geq 1, 2n = 3\ell, 5k = 7m\};$
14.  $\{a^n b^m : n, m \geq 0, 5n + 3m = 24\};$
15.  $\{a^n b^m : n, m \geq 0, 5n - 3m = 24\}.$

**Задача 6.** Докажите, что если  $R$  — регулярный язык, а  $C$  — КС-язык, то  $C \cap R$  — КС-язык.

**Задача 7.** Какие из приведенных ниже утверждений верны для любых  $R$  и  $C$ , а какие — нет?

1. Если  $R$  — регулярный язык, то  $\{ww : w \in R\}$  — также регулярный язык.
2. Если  $R$  — регулярный язык, то  $\{w : ww \in R\}$  — также регулярный язык.
3. Если  $C$  — КС-язык, то  $\{ww : w \in C\}$  — также КС-язык.
4. Если  $C$  — КС-язык, то  $\{w : ww \in C\}$  — также КС-язык.

**Задача 2.** Примените алгоритм Кока-Касами-Янгера для проверки принадлежности слова языку, порожденному КС-грамматикой со следующими правилами:  $w = abababa$ ,  $\Gamma = \{S \rightarrow ST|a, T \rightarrow BS, B \rightarrow b\}$ .

**Решение.** Таблица, которую построит алгоритм Кока-Касами-Янгера, имеет вид

$S$	$\emptyset$	$S$	$\emptyset$	$S$	$\emptyset$	$S$
$B$	$T$	$\emptyset$	$T$	$\emptyset$	$T$	
$S$	$\emptyset$	$S$	$\emptyset$	$S$		
$B$	$T$	$\emptyset$	$T$			
$S$	$\emptyset$	$S$				
$B$	$T$					
		$S$				

**Задача 4.**

2. Контекстно-свободный, нерегулярный:

- $\{a^n b^m : n \neq m\} = \{a^k a^m b^m : k \geq 1, m \geq 0\} \cup \{a^n b^n b^k : k \geq 1, n \geq 0\}$ , и оба языка из объединения, очевидно, контекстно-свободные;
- если бы язык  $\{a^n b^m : n \neq m\}$  был бы регулярным, то регулярным был бы и язык  $\{a^n b^n : n \geq 0\} = a^* b^* \setminus \{a^n b^m : n \neq m\}$ .

4. Регулярный.

6. Рекурсивный, но не контекстно-свободный.

- Рекурсивность очевидна.
- $\{a^n b^m c^k : (n, m, k \geq 1) \wedge 2n = 3k \wedge 5k = 7m\} = \{a^{21\ell} b^{10\ell} c^{14\ell} : \ell \geq 0\}$ ; как следует из теоремы о разрастании этот язык не является контекстно-свободным.

8. Если бы этот язык был контекстно-свободным, то согласно теореме о разрастании для достаточно больших  $n$  этой теореме должны были бы удовлетворять слова  $a^n b^n c^n$ . Однако если подслово  $uv$ , где  $|uv| = i > 0$ , указанное в теореме о разрастании, целиком содержится в префикссе  $a^n$  или  $b^n$ , то и слова  $a^{n-i} b^n c^n$  и  $a^n b^{n-i} c^n$  также должны были бы принадлежать указанному языку (что, очевидно, неверно), а если подслово  $uv$ , целиком содержится в суффиксе  $c^n$ , то и слово  $a^n b^n c^{n-i}$  также должно было бы принадлежать указанному языку (что, очевидно, также неверно). Аналогичный эффект имеет место и в тех случаях, когда подслово  $uv$  располагается на границе между подсловами  $a^n$  и  $b^n$  или на границе между подсловами  $b^n$  и  $c^n$ .

10. Рекурсивный, но не контекстно-свободный.

12. Рекурсивный, но не контекстно-свободный.

14. Регулярный.