Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

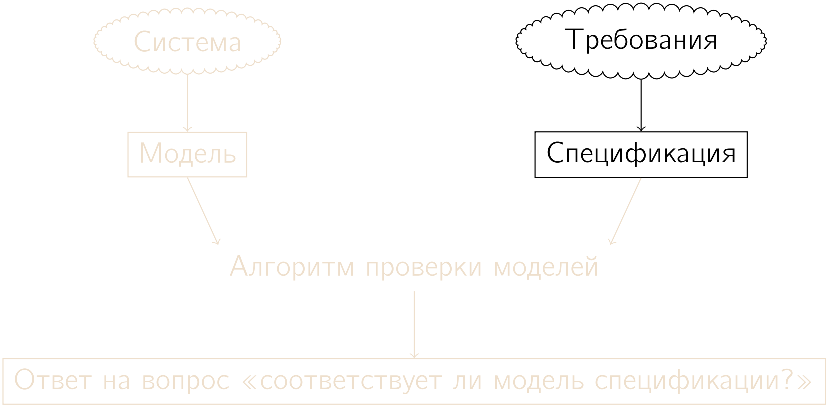
Блок 52

Темпоральные логики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Вступление



Система
Требования
Модель
Спецификация
Алгоритм проверки моделей
Ответ на вопрос «соответствует ли модель спецификации?»

Вступление

Самый простой логический язык записи спецификаций, совместимый с МК и на котором можно основывать другие языки — это язык логики высказываний

Формулу логики высказываний можно понимать как запись соотношения между значениями АВ в конкретном состоянии

Но система в процессе вычисления (с течением времени) изменяет свои состояния, и соответственно изменяются значения АВ

Темпоральная логика — это логика, в которой учитывается изменение значения высказываний с течением времени и содержатся средства записи и анализа взаимосвязи значений высказываний в разные моменты времени

Операции языка темпоральной логики, как правило, делятся на «классические» (отвечающие логике высказываний или предикатов) и темпоральные, позволяющие рассуждать о разных моментах времени

Рассмотрим ключевые языки темпоральной логики, применяющиеся в области проверки моделей

CTL*: синтаксис и семантика

Начнём с языка CTL*,

оставив расшифровку этой аббревиатуры на потом

Синтаксис формул CTL* над множеством АВ $\mathcal{AP}$ задаётся БНФ

$$
\begin{array}{lcl}
\Phi & ::= & \mathbb{t} \mid p \mid (\Phi \,\&\, \Phi) \mid (\Phi \vee \Phi) \mid (\neg\Phi) \mid (\Phi \to \Phi) \\
 & \mid & (\mathbf{A}\varphi) \mid (\mathbf{E}\varphi) \\
\varphi & ::= & \Phi \mid (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \\
 & \mid & (\mathbf{F}\varphi) \mid (\mathbf{G}\varphi) \mid (\mathbf{X}\varphi) \mid (\varphi\mathbf{U}\varphi),
\end{array}
$$

где

- Φ — формула CTL*, или, по-другому, формула состояния,
- φ — формула пути и
- $p \in \mathcal{AP}$

Для двух видов формул соответственно определяется два вида выполнимости:

- Выполнимость формулы состояния Φ в заданном состоянии s МК M: $M, s \models \Phi$
- Выполнимость формулы пути φ на заданном бесконечном пути π в МК M: $M, \pi \models \varphi$

CTL*: синтаксис и семантика

Начнём с языка CTL*,
оставив расшифровку этой аббревиатуры на потом

Синтаксис формул CTL* над множеством АВ $\mathcal{AP}$ задаётся БНФ

$$\begin{array}{lcl} \Phi & ::= & \mathbb{t} \mid p \mid (\Phi \,\&\, \Phi) \mid (\Phi \vee \Phi) \mid (\neg\Phi) \mid (\Phi \to \Phi) \\ & \mid & (\mathbf{A}\varphi) \mid (\mathbf{E}\varphi) \\ \varphi & ::= & \Phi \mid (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \\ & \mid & (\mathbf{F}\varphi) \mid (\mathbf{G}\varphi) \mid (\mathbf{X}\varphi) \mid (\varphi\mathbf{U}\varphi), \end{array}$$

Приоритеты операций: $\neg$, **A**, **E**, **F**, **G** и **X**; затем **U**;
затем остальные операции с обычными приоритетами

Символ $\mathbb{t}$, связки $\&$, $\vee$, $\neg$, $\to$ и АВ p
имеют привычный содержательный смысл

Буквы **A** и **E** — это кванторы пути:

- «$\mathbf{A}\varphi$» = «для любого бесконечного пути, исходящего из текущего состояния, верно φ» и
- «$\mathbf{E}\varphi$» = «существует бесконечный путь, исходящий из текущего состояния и такой что для него верно φ»

CTL*: синтаксис и семантика

Начнём с языка CTL*,
оставив расшифровку этой аббревиатуры на потом

Синтаксис формул CTL* над множеством АВ $\mathcal{AP}$ задаётся БНФ

$$\begin{array}{lcl}
\Phi & ::= & \mathfrak{t} \mid p \mid (\Phi \,\&\, \Phi) \mid (\Phi \vee \Phi) \mid (\neg\Phi) \mid (\Phi \to \Phi) \\
 & \mid & (\mathbf{A}\varphi) \mid (\mathbf{E}\varphi) \\
\varphi & ::= & \Phi \mid (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \\
 & \mid & (\mathbf{F}\varphi) \mid (\mathbf{G}\varphi) \mid (\mathbf{X}\varphi) \mid (\varphi\mathbf{U}\varphi),
\end{array}$$

Буквы **F**, **G**, **X**, **U** — это темпоральные операторы:

- «$\mathbf{F}\varphi$» = «когда-нибудь, рано или поздно, станет верно φ» (in Future)
- «$\mathbf{G}\varphi$» = «всегда будет верно φ» (Globally)
- «$\mathbf{X}\varphi$» = «в следующем состоянии будет верно φ» (neXt step)
- «$\varphi\mathbf{U}\psi$» = «когда-нибудь станет верно ψ,
а пока оно не стало верным, обязательно верно φ» (Until)

CTL*: синтаксис и семантика

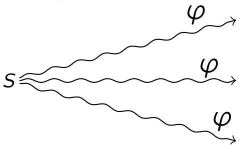
Отношения выполнимости формул для МК $M = (S, S_0, \mapsto, L)$, состояния s и бесконечного пути π задатся следующими правилами:

- Соотношение $M, s \models \mathbb{t}$ верно всегда
- $M, s \models p$, где $p \in \mathcal{AP} \quad \Leftrightarrow \quad p \in L(s)$
- $M, s \models \Phi \,\&\, \Psi \quad \Leftrightarrow \quad M, s \models \Phi$ и $M, s \models \Psi$
- $M, \pi \models \varphi \,\&\, \psi \quad \Leftrightarrow \quad M, \pi \models \varphi$ и $M, \pi \models \psi$
- $M, s \models \Phi \vee \Psi \quad \Leftrightarrow \quad M, s \models \Phi$ или $M, s \models \Psi$
- $M, \pi \models \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad M, \pi \models \varphi$ или $M, \pi \models \psi$
- $M, s \models \neg\Phi \quad \Leftrightarrow \quad M, s \not\models \Phi$
- $M, \pi \models \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad M, \pi \not\models \varphi$
- $M, s \models \Phi \to \Psi \quad \Leftrightarrow \quad M, s \not\models \Phi$ или $M, s \models \Psi$
- $M, \pi \models \varphi \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad M, \pi \not\models \varphi$ или $M, \pi \models \psi$
- $M, \pi \models \Phi$ для формулы состояния $\Phi \quad \Leftrightarrow \quad M, \pi[1] \models \Phi$
  - $\pi[i]$ — i-е состояние пути π **при нумерации с единицы**

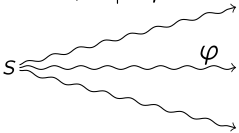
CTL*: синтаксис и семантика

Отношения выполнимости формул для МК $M = (S, S_0, \mapsto, L)$, состояния s и бесконечного пути π задатся следующими правилами:

- $M, s \models \mathbf{A}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ для любого бесконечного пути π в M, исходящего из s, верно $M, \pi \models \varphi$



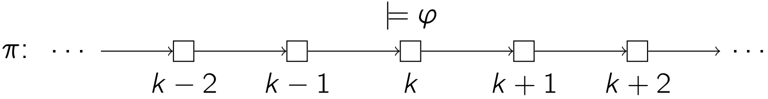
- $M, s \models \mathbf{E}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует бесконечный путь в M, исходящий из s и такой что $M, \pi \models \varphi$



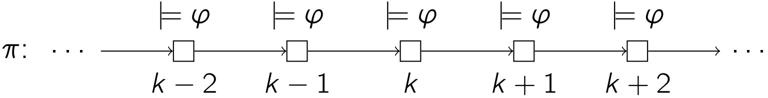
CTL*: синтаксис и семантика

Отношения выполнимости формул для МК $M = (S, S_0, \mapsto, L)$, состояния s и бесконечного пути π задатся следующими правилами:

- $M, \pi \models \mathbf{F}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует номер k, $k \geq 1$, такой что $M, \pi^k \models \varphi$
  - π^k — суффикс пути π, начинающийся с k-го состояния



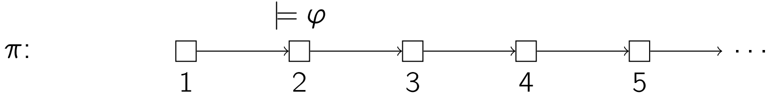
- $M, \pi \models \mathbf{G}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ для любого номера k, $k \geq 1$, верно $M, \pi^k \models \varphi$



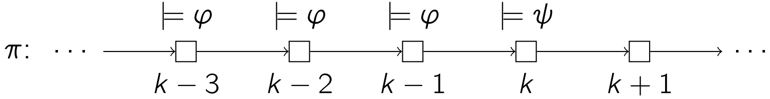
CTL*: синтаксис и семантика

Отношения выполнимости формул для МК $M = (S, S_0, \mapsto, L)$, состояния s и бесконечного пути π задатся следующими правилами:

- $M, \pi \models \mathbf{X}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad M, \pi^2 \models \varphi$



- $M, \pi \models \varphi \mathbf{U} \psi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует номер k, $k \geq 1$, такой что
  - $M, \pi^k \models \psi$ и
  - для любого номера m, такого что $1 \leq m < k$, верно $M, \pi^m \models \varphi$



CTL*: постановка задачи проверки моделей

Формула CTL* φ выполняется на МК M ($M \models \varphi$),
если она выполняется в любом начальном состоянии системы M

Задача проверки моделей для CTL* формулируется так:
для заданной **конечной** МК M
и заданной формулы φ CTL*
проверить справедливость соотношения $M \models \varphi$

На практике обычно рассматриваются не сам язык CTL*, а два его более простых для понимания фрагмента

LTL

«LTL» расшифровывается как «Linear Time Logic»,
логика линейного времени

Формула LTL — это формула CTL* вида $\mathbf{A}\varphi$,
в которой подформула φ не содержит ни одного квантора пути

То есть устроенная так:

$$\begin{array}{lcl} \Phi & ::= & (\mathbf{A}\varphi) \\ \varphi & ::= & \mathbb{t} \mid p \mid (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \\ & \mid & (\mathbf{F}\varphi) \mid (\mathbf{G}\varphi) \mid (\mathbf{X}\varphi) \mid (\varphi \mathbf{U} \varphi) \end{array}$$

Формулы LTL предназначены для формализации
высказываний о вычислениях модели:
«все вычисления модели должны обладать следующим свойством: ...»

LTL

Примеры спецификаций на языке LTL:

- Данные на печать передаются не более чем одним принтером:
$$\mathbf{AG}\neg(\mathit{print}_1\ \&\ \mathit{print}_2)$$
- После завершения процедур начисления стипендии и зарплаты на счёте будет ровно 1 001 000 рублей:
$$\mathbf{AFG}\,p_{\text{счёт}=1\,001\,000}$$
- На следующем шаге после оплаты напитка он будет выдаваться:
$$\mathbf{AG}(\neg \mathit{paid}\ \&\ \mathbf{X}\mathit{paid} \to \mathbf{XX}(\mathit{serve}_t \vee \mathit{serve}_c))$$
- Если компьютер достаточно часто посылает запрос на печать, то рано или поздно он начнёт печатать:
$$\mathbf{A}(\mathbf{GF}\mathit{request} \to \mathbf{F}\mathit{print})$$
- Если идёт печать, то сеанс печати рано или поздно завершится, и до завершения принтер будет занят:
$$\mathbf{AG}(\mathit{print} \to \mathit{busy}\,\mathbf{U}\neg\mathit{print})$$

CTL

«CTL» расшифровывается как «Computational Tree Logic», *логика деревьев вычислений*, или, если хочется подчеркнуть различия с LTL, — логика ветвящегося времени в противовес линейному

Формула CTL — это формула CTL* частного вида, отвечающего БНФ

$$\begin{array}{rcl} \Phi & ::= & \mathbb{t} \mid p \mid (\Phi \mathbin{\&} \Phi) \mid (\Phi \vee \Phi) \mid (\neg\Phi) \mid (\Phi \to \Phi) \\ & \mid & (\mathbf{A}\varphi) \mid (\mathbf{E}\varphi) \\ \varphi & ::= & (\mathbf{F}\Phi) \mid (\mathbf{G}\Phi) \mid (\mathbf{X}\Phi) \mid (\Phi\mathbf{U}\Phi) \end{array}$$

То есть в формуле CTL под квантором пути обязательно располагается темпоральный оператор, и под ним — формула состояния

Иными словами, в формуле CTL кванторы пути и темпоральные операторы используются только в парах:

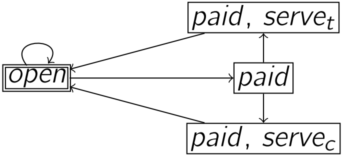
AG, **EG**, **AF**, **EF**, **AX**, **EX**, **AU**, **EU**

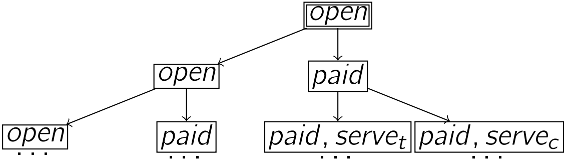
CTL

Лучше понять смысл формул CTL помогает развёртка МК — бесконечное дерево, устроенное так:

- Корень — это выбранное начальное состояние
- Вершина развёртки отвечает конечному пути в МК и размечена теми же АВ, что и последняя вершина пути
- Дуга $v_1 \to v_2$ в развёртке означает, что путь v_1 можно продолжить до пути v_2, добавив один переход

Например, ниже изображены МК и фрагмент её развёртки





CTL

Примеры спецификаций на языке CTL для кофейного автомата:

- В самом начале работы автомата приёмник монет открыт, в нём нет монеты, и автомат ничего не выдаёт:
$$open \,\&\, \neg paid \,\&\, \neg serve_t \,\&\, \neg serve_c$$
- Нельзя сделать так, чтобы автомат выдал напиток, не имея монеты в приёмнике:
$$\neg \mathbf{EF}(\neg paid \,\&\, (serve_c \vee serve_t))$$
- Если в приёмнике есть монета, то рано или поздно он выдаст напиток ...
$$\mathbf{AG}(paid \to \mathbf{AF}(serve_c \vee serve_t))$$
- ... но этот напиток не обязан быть чаем ...
$$\mathbf{EF}(paid \,\&\, \mathbf{EG}\neg serve_t)$$
- ... но при желании можно, опустив монету в приёмник, получить чай
$$\mathbf{AG}(\neg paid \to \mathbf{AX}(paid \to \mathbf{EF} serve_t))$$