Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 6

Логика предикатов (ЛП):
выполнимые и общезначимые формулы,
модели формул,
логическое следствие,
проблема общезначимости формул (постановка)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

Продолжаем обсуждение логики предикатов (ЛП)

Вспомним на примере, что есть что

Сигнатура:

$$\langle\{\mathbf{c}\}, \{\mathbf{f}^{(1)}\}, \{\mathrm{P}^{(1)}\}\rangle$$

Формула:

$$\varphi = \mathrm{P}(\mathbf{c}) \to \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))$$

Интерпретация $\mathcal{I}$:

предметная область: $\{d_1, d_2\}$

$\overline{\mathbf{c}} = d_1 \qquad \overline{\mathbf{f}}(d_1) = \overline{\mathbf{f}}(d_2) = d_1 \qquad \overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t}, \quad \overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f}$

Отношение выполнимости:

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ выполнима в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \mid\models \varphi$[1]),
если **существует** набор предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации $\mathcal{I}$,
такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$

Формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ истинна в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$),
если **для любого** набора предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации $\mathcal{I}$
верно $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$

Формула φ выполнима ($\mid\models \varphi$[1]),
если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ общезначима
(тождественно истинна; является тавтологией; $\models \varphi$),
если она истинна в любой интерпретации

Про невыполнимую формулу также часто говорят,
что она тождественно ложна

---

1 Как и раньше, это необщеупотребимое обозначение

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$\begin{array}{ll} \varphi: & \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \psi: & \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \chi: & \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \end{array}$$

Интерпретация $\mathcal{I}_1$: $\mathsf{D} = \{d\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbb{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_1 \models \psi \qquad \mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация $\mathcal{I}_2$: $\mathsf{D} = \{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \psi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что было показано, что

1. формулы φ, ψ выполнимы
2. формулы ψ, χ необщезначимы

А как доказать общезначимость φ и невыполнимость χ?

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, в которых записана некоторая «нетривиальная» («полезная») информация

Общезначимые формулы — это (*казалось бы*) банальности, тавтологии, формы, не содержащие в себе никакой «полезной» информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

ЛП: модели

Интерпретация $\mathcal{I}$ называется моделью для **предложения** φ, если $\mathcal{I} \models \varphi$

$$\text{интерпретация } \mathcal{I} \; \underset{\text{истинно (выполняется) в}}{\overset{\text{является моделью для}}{\rightleftarrows}} \; \text{предложение } \varphi$$

Интерпретация $\mathcal{I}$ называется моделью для **множества предложений** Γ ($\mathcal{I} \models \Gamma$), если она является моделью для каждого предложения из Γ, и в этом случае говорят, что Γ выполняется в $\mathcal{I}$

Наряду с «модель для формулы/множества» будем также говорить «модель формулы/множества» (без «для»)

Относительно каждой интерпретации $\mathcal{I}$ все предложения делятся на

- выполнимые в $\mathcal{I}$ («верные») и
- невыполнимые в $\mathcal{I}$ («неверные»)

Относительно каждого предложения φ все интерпретации делятся на

- модели для φ (адекватно подходящие под устройство φ) и
- не являющиеся моделями для φ (неподходящие)

ЛП: модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$\mathrm{C}(\mathrm{x})$: «x — круг» $\quad$ $\mathrm{B}(\mathrm{x})$: «x — чёрный предмет»

$\mathrm{S}(\mathrm{x})$: «x — квадрат» $\quad$ $\mathrm{W}(\mathrm{x})$: «x — белый предмет»

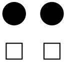
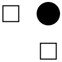
$\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$: «предмет x лежит под предметом y»

Рассмотрим такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

«**любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом**»

и такие интерпретации:

$\mathcal{I}_1$:  $\qquad$ $\mathcal{I}_2$: 

Тогда $\mathcal{I}_1$ **является моделью** для φ, а $\mathcal{I}_2$ **не является**:

- $\mathcal{I}_1 \models \varphi$: оба белых квадрата лежат под чёрными кругами
- $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$: левый белый квадрат **не** лежит под чёрным кругом

ЛП: логическое следствие

Предложение φ называется логическим следствием множества предложений Γ ($\Gamma \models \varphi$), если любая модель Γ является моделью φ

Другими словами — если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно

$$\mathcal{I} \models \Gamma \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Содержательно — если независимо от смысла символов сигнатуры из справедливости всех утверждений, записанных в Γ, **обязательно** следует справедливость утверждения φ

Отношение $\models$, используемое в таком смысле, будем называть отношением логического следования

Наряду с «$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$» будем также писать «$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$»

ЛП: логическое следствие

Небольшое пояснение:

- $\forall x\, P(x) \models P(\mathbf{c})$:
  если все предметы обладают свойством P, то **обязательно** предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P
- $P(\mathbf{c}) \not\models \forall x\, P(x)$:
  если предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P», то из этого **в общем случае не следует**, что все предметы обладают свойством P

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это **извлечение логических следствий** из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей «разумной деятельности»: экспертные системы, (автоматическое и ручное) доказательство теорем, формальный анализ программ, . . . , . . .

ЛП: логическое следствие (пример)

Покажем, что представляют собой логические следствия,
на простом показательном примере

Известно, что:

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов

Начнём с сигнатуры алфавита: в неё войдут

- константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво** и
- предикатный символ $\mathrm{L}^{(2)}$: $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ «икс любит игрека»

ЛП: логическое следствие (пример)

Условия задачи переписываются так:

- Даша любит Сашу
$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$$
- Саша любит пиво
$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$$
- Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:
$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво}) \\ \varphi_4 &= \forall \mathrm{x}\, (\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y})\,\&\,\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x}))\end{aligned}$$
- Любит ли кто-нибудь дашу?
  Правда ли, что из знаний $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ необходимо следует знание
$$\varphi_0 = \exists x\ L(\mathrm{x}, \textbf{Даша})\ ?$$

В конечном итоге задача переписывается так:

проверить соотношение $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \varphi_0$

Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим, что $\Gamma \models \varphi$

Рассмотрим **произвольную** интерпретацию $\mathcal{I}$

Если $\mathcal{I} \not\models \Gamma$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n$, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \Gamma$

Так как $\Gamma \models \varphi$, верно и $\mathcal{I} \models \varphi$ —
а значит, снова верно $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Итог: для **любой** интерпретации $\mathcal{I}$ верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

По определению общезначимости, это означает $\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ **и любого конечного множества предложений** $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ **справедлива равносильность**

$$\Gamma \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Предположим, что $\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Рассмотрим **произвольную** модель $\mathcal{I}$ для множества Γ:

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n$

Так как формула $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$ общезначима, верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Согласно семантике $\to$, верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, **произвольная** модель $\mathcal{I}$ множества Γ является и моделью формулы φ, то есть $\Gamma \models \varphi$ ▼

ЛП: проблема общезначимости формул

Чтобы уметь извлекать логические следствия и в целом анализировать достоверность утверждений, необходимо понимать **законы**, связывающие достоверность различных утверждений

Общезначимые формулы представляют собой один из способов записи таких законов — например, закон вида «**если верны утверждения $\psi_1, \dots, \psi_n$, то верно и φ**» записывается в виде общезначимой формулы

$$\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

В связи с этим оказывается важна проблема общезначимости формул:

для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:
$\models \varphi$?

ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ общезначима

$\psi = \neg\varphi$ $\qquad$ $\varphi = \neg\psi$

$\psi = \forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \varphi$

предложение ψ общезначимо

формула $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ невыполнима

$\varphi = \psi$ $\updownarrow$ противоположный ответ

$\varphi = \exists\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \psi$

предложение φ невыполнимо

формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ выполнима

$\psi = \exists\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \varphi$

предложение ψ выполнимо

$\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — сокращение для $\forall \mathrm{x}_1\ \ldots\forall \mathrm{x}_{\mathrm{n}}$

$\exists\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — сокращение для $\exists \mathrm{x}_1\ \ldots\exists \mathrm{x}_{\mathrm{n}}$

ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

Утверждение

формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^n)$ общезначима

$\psi = \forall \widetilde{\mathrm{x}}^n\ \varphi$

предложение ψ общезначимо

$\psi = \neg\varphi$ $\qquad$ $\varphi = \neg\psi$

формула $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^n)$ невыполнима

$\varphi = \exists \widetilde{\mathrm{x}}^n\ \psi$

предложение φ невыполнимо

$\varphi = \psi$ противоположный ответ

формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^n)$ выполнима

$\psi = \exists \widetilde{\mathrm{x}}^n\ \varphi$

предложение ψ выполнимо

Доказательство. Напрямую следует из определений выполнимости, невыполнимости и общезначимости ▼