

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 6

Логика предикатов (ЛП):
выполнимые и общезначимые формулы
модели формул
логическое следствие
проблема общезначимости формул (постановка)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Вступление

Продолжаем обсуждение логики предикатов ([ЛП](#))

Вспомним на примере, что есть что

Сигнатура:

$$\langle \{\mathbf{c}\}, \{\mathbf{f}^{(1)}\}, \{P^{(1)}\} \rangle$$

Формула:

$$\varphi = P(\mathbf{c}) \rightarrow \forall x P(\mathbf{f}(x))$$

Интерпретация \mathcal{I} :

предметная область: $\{d_1, d_2\}$

$$\bar{\mathbf{c}} = d_1 \quad \bar{\mathbf{f}}(d_1) = \bar{\mathbf{f}}(d_2) = d_1 \quad \bar{P}(d_1) = \text{t}, \quad \bar{P}(d_2) = \text{f}$$

Отношение выполнимости:

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполнима в интерпретации \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi^1$),
если существует набор предметов \tilde{d}^n из области интерпретации \mathcal{I} ,
такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ истинна в интерпретации \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi$),
если для любого набора предметов \tilde{d}^n из области интерпретации \mathcal{I}
верно $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула φ выполнима ($\models \varphi^1$),
если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ общезначима
(тождественно истинна; является тавтологией; $\models \varphi$),
если она истинна в любой интерпретации

Про невыполнимую формулу также часто говорят,
что она тождественно ложна

1 Как и раньше, это необщепотребимое обозначение

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$\varphi: \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\psi: \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$\chi: \forall x P(x) \& \forall x \neg P(x)$$

Интерпретация \mathcal{I}_1 : $D = \{d\}$, $\bar{P}(d) = \text{т}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi$$

$$\mathcal{I}_1 \models \psi$$

$$\mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация \mathcal{I}_2 : $D = \{d_1, d_2\}$, $\bar{P}(d_1) = \text{т}$, $\bar{P}(d_2) = \text{ф}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi$$

$$\mathcal{I}_2 \not\models \psi$$

$$\mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что было показано, что

1. формулы φ, ψ выполнимы
2. формулы ψ, χ необщезначимы

А как доказать общезначимость φ и невыполнимость χ ?

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, в которых записана некоторая «нетривиальная» («полезная») информация

Общезначимые формулы — это (казалось бы) банальности, тавтологии, формы, не содержащие в себе никакой «полезной» информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

ЛП: модели

Интерпретация \mathcal{I} называется **моделью для предложения** φ , если $\mathcal{I} \models \varphi$



Интерпретация \mathcal{I} называется **моделью для множества предложений** Γ , если она является моделью для каждого предложения из Γ

Наряду с «модель для формулы/множества» будем также говорить
«модель формулы/множества» (без «для»)

Относительно каждой интерпретации \mathcal{I} все предложения делятся на

- ▶ выполнимые в \mathcal{I} («верные») и
- ▶ невыполнимые в \mathcal{I} («неверные»)

Относительно каждого предложения φ все интерпретации делятся на

- ▶ модели для φ (адекватно подходящие под устройство φ) и
- ▶ не являющиеся моделями для φ (неподходящие)

ЛП: модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$C(x)$: « x — круг»

$B(x)$: « x — чёрный предмет»

$S(x)$: « x — квадрат»

$W(x)$: « x — белый предмет»

$U(x, y)$: «предмет x лежит под предметом y »

Рассмотрим такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

«любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом»

и такие интерпретации:



Тогда \mathcal{I}_1 **является моделью** для φ , а \mathcal{I}_2 **не является**:

- ▶ $\mathcal{I}_1 \models \varphi$: оба белых квадрата лежат под чёрными кругами
- ▶ $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$: левый белый квадрат **не** лежит под чёрным кругом

ЛП: логическое следствие

Предложение φ называется **логическим следствием** множества предложений Γ ($\Gamma \models \varphi$), если любая модель Γ является моделью φ

Другими словами — если для любой интерпретации \mathcal{I} верно

$$\mathcal{I} \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi$$

Содержательно — если независимо от смысла символов сигнатуры из справедливости всех утверждений, записанных в Γ ,
обязательно следует справедливость утверждения φ

Отношение \models , используемое в таком смысле,
будем называть **отношением логического следования**

Наряду с « $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \models \varphi$ » будем также писать « $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ »

ЛП: логическое следствие

Небольшое пояснение:

- ▶ $\forall x P(x) \models P(c)$:
если все предметы обладают свойством P , то **обязательно** предмет, обозначенный символом c , обладает свойством P
- ▶ $P(c) \not\models \forall x P(x)$:
если предмет, обозначенный символом c , обладает свойством P ,
то из этого **в общем случае не следует**, что
все предметы обладают свойством P

Одна из главных задач (и характерное проявление)
интеллектуальной деятельности — это
извлечение логических следствий из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей «разумной
деятельности»: **экспертные системы**, (автоматическое и ручное)
доказательство теорем, **формальный анализ программ**, ..., ...

ЛП: логическое следствие (пример)

Покажем, что представляют собой логические следствия, на простом показательном примере

Известно, что:

- ▶ Даша любит Сашу,
- ▶ а Саша любит пиво,
- ▶ а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов

Начнём с сигнатуры алфавита: в ней войдут

- ▶ константы **Даша, Саша, Паша, пиво** и
- ▶ предикатный символ $L^{(2)}$: $L(x, y) = \text{«}x \text{ любит } y\text{»}$

ЛП: логическое следствие (пример)

Условия задачи переписываются так:

- ▶ Даша любит Сашу

$$\varphi_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$$

- ▶ Саша любит пиво

$$\varphi_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво})$$

- ▶ Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:

$$\varphi_3 = L(\text{Паша}, \text{пиво})$$

$$\varphi_4 = \forall x (\exists y (L(\text{Паша}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\text{Паша}, x))$$

- ▶ Любит ли кто-нибудь дашу?

Правда ли, что из знаний $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ необходимо следует знание

$$\varphi_0 = \exists x L(x, \text{Даша}) ?$$

В конечном итоге задача переписывается так:

проверить соотношение $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \varphi_0$

ЛП: логическое следствие (несколько свойств)

Утверждение (о монотонности следования в ЛП)

Для любых множеств предложений Γ, Δ
и любого предложения φ верно:

$$\Gamma \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \cup \Delta \models \varphi$$

Доказательство

Пусть верно $\Gamma \models \varphi$

Тогда для любой интерпретации \mathcal{I} верно:

$$\mathcal{I} \models \Gamma \cup \Delta$$

\Rightarrow (по определению модели)

для любой формулы ψ из $\Gamma \cup \Delta$ верно $\mathcal{I} \models \psi$

\Rightarrow (т.к. $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$)

для любой формулы ψ из Γ верно $\mathcal{I} \models \psi$

\Rightarrow (по определению модели)

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

\Rightarrow (по определению логического следствия и т.к. $\Gamma \models \varphi$)

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

Значит, любая модель $\Gamma \cup \Delta$ является моделью φ , то есть $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$ ▼

ЛП: логическое следствие (несколько свойств)

Утверждение (о монотонности \vee относительно следования в ЛП)

Для любого множества предложений Γ
и любых формул $\varphi(\tilde{x}^n)$, $\psi(\tilde{x}^n)$ верно:

$$\Gamma \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \Rightarrow \Gamma \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi \vee \psi)$$

Доказательство

Пусть $\Gamma \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$

Тогда для любой интерпретации \mathcal{I} верно:

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

\Rightarrow (по определению логического следствия и т.к. $\Gamma \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$)

$$\mathcal{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$$

\Rightarrow (по семантике \forall)

для любого набора предметов \tilde{d}^n верно $\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$

\Rightarrow (по семантике \vee)

для любого набора предметов \tilde{d}^n верно $\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\tilde{d}^n]$

\Rightarrow (по семантике \forall)

$$\mathcal{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi \vee \psi)$$

Значит, любая модель Γ является моделью $\forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi \vee \psi)$ ▼

ЛП: логическое следствие (несколько свойств)

Утверждение (о транзитивности следования в ЛП)

Для любого множества предложений Γ

и любых предложений $\psi_1, \dots, \psi_k, \varphi$ верно:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \models \psi_1 \\ \cdots \\ \Gamma \models \psi_k \\ \psi_1, \dots, \psi_k \models \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

Доказательство

Пусть верны все соотношения слева от \Rightarrow

Тогда для любой интерпретации \mathcal{I} верно:

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

\Rightarrow (по определению логического следования)

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \text{ и } \dots \text{ и } \mathcal{I} \models \psi_k$$

\Rightarrow (по определению модели множества формул)

$$\mathcal{I} \models \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$$

\Rightarrow (по определению логического следования)

$$\mathcal{I} \models \varphi \blacktriangledown$$

Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \models \psi_1 \& \psi_2 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

Доказательство. (\Rightarrow) Предположим, что $\Gamma \models \varphi$

Рассмотрим **произвольную** интерпретацию \mathcal{I}

Если $\mathcal{I} \not\models \Gamma$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \Gamma$

Так как $\Gamma \models \varphi$, верно и $\mathcal{I} \models \varphi$ —
а значит, снова верно $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Итог: для **любой** интерпретации \mathcal{I} верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

По **определению общезначимости**, это означает $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \models \psi_1 \& \psi_2 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

Доказательство. (\Leftarrow) Предположим, что $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Рассмотрим **произвольную** модель \mathcal{I} для множества Γ :

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \dots, \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$

Так как формула $\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$ общезначима, верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

Согласно **семантике \rightarrow** , верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, **произвольная** модель \mathcal{I} множества Γ является и моделью формулы φ , то есть $\Gamma \models \varphi$ ▼

ЛП: проблема общезначимости формул

Чтобы уметь извлекать логические следствия и в целом анализировать достоверность утверждений, необходимо понимать **законы**, связывающие достоверность различных утверждений

Общезначимые формулы представляют собой один из способов записи таких законов — например, закон вида **«если верны утверждения ψ_1, \dots, ψ_n , то верно и φ »** записывается в виде общезначимой формулы

$$\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

В связи с этим оказывается важна проблема общезначимости формул:

для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:
 $\models \varphi ?$

ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ общезначима

$$\psi = \neg\varphi$$

$$\varphi = \neg\psi$$

предложение ψ общезначимо

формула $\psi(\tilde{x}^n)$ невыполнима

$$\varphi = \psi$$

↑ противоположный
ответ

предложение φ невыполнимо

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполнима

предложение ψ выполнимо

$\forall\tilde{x}^n$ — сокращение для $\forall x_1 \dots \forall x_n$

$\exists\tilde{x}^n$ — сокращение для $\exists x_1 \dots \exists x_n$

ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

Утверждение

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ общезначима

$$\psi = \neg\varphi$$

$$\varphi = \neg\psi$$

$$\psi = \forall \tilde{x}^n \varphi$$

предложение ψ общезначимо

формула $\psi(\tilde{x}^n)$ невыполнима

$$\varphi = \psi$$

противоположный
ответ

$$\varphi = \exists \tilde{x}^n \psi$$

предложение φ невыполнимо

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполнима

$$\psi = \exists \tilde{x}^n \varphi$$

предложение ψ выполнимо

Доказательство. Напрямую следует из определений выполнимости, невыполнимости и общезначимости