

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 7

Логика предикатов:  
можно ли проверить  
общезначимость формулы «в лоб»?

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Для **логики высказываний** существует очень простой способ проверки общезначимости формул «в лоб»:

- ▶ Вспомнить, что общезначимость формулы в этой логике — это то же самое, что равенство константе 1 в булевой алгебре
- ▶ **Перебрать** все наборы значений булевых переменных формулы и для каждого проверить, принимает ли реализуемая функция значение 0
- ▶ Если найден хотя бы один такой набор, то формула необщезначима; иначе формула общезначима

**А можно ли адаптировать этот метод проверки общезначимости к логике предикатов?**

«Перебрать все наборы значений булевых переменных формулы» — в ЛВ это «**Перебрать все интерпретации формулы**»

«Реализуемая функция принимает значение 0» — в ЛВ это «**Формула не выполняется в интерпретации**»

Значит, прямое обобщение «лобового» способа проверки общезначимости формулы  $\varphi$  на логику предикатов выглядит так:

- ▶ Перебрать всевозможные интерпретации
- ▶ Для каждой (очередной) интерпретации  $\mathcal{I}$  проверить соотношение  $\mathcal{I} \models \varphi$
- ▶ Если обнаружена интерпретация  $\mathcal{I}$ , такая что  $\mathcal{I} \not\models \varphi$ , то формула необщезначима
- ▶ Если все интерпретации перебраны и для каждой показано соотношение  $\mathcal{I} \models \varphi$ , то формула общезначима

Но всё не так просто:

- ▶ Как задать интерпретацию с бесконечной предметной областью?
- ▶ Как проверить истинность формулы в такой интерпретации?
- ▶ Как перебрать «ужасно»-бесконечное число интерпретаций?

Если бы можно было ограничиться только **конечными** интерпретациями, то проблем бы было намного меньше, но ...

**Утверждение.** Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

**Доказательство.** Вот пример такого предложения  $\varphi$ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

Рассмотрим такую интерпретацию  $\mathcal{I}$ :

- ▶ Предметная область — множество всех натуральных чисел
- ▶  $\overline{R}(a, b) = \mathfrak{t} \iff a < b$

Тогда:

- ▶  $\mathcal{I} \models \forall x \neg R(x, x)$ , т.к. никакое число не меньше себя
- ▶  $\mathcal{I} \models \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z))$ ,  
т.к. если  $a < b$  и  $b < c$ , то обязательно  $a < c$
- ▶  $\mathcal{I} \not\models \exists x \forall y \neg R(x, y)$ ,  
т.к. среди натуральных чисел не существует максимального

Следовательно,  $\mathcal{I} \not\models \varphi$ , и предложение  $\varphi$  **необщезначимо**

**Утверждение.** Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

**Доказательство.** Вот пример такого предложения  $\varphi$ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \ \forall y \ \forall z \ (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \ \forall y \neg R(x, y)$$

Общее истолкование этой формулы, не зависящее от оценки символа  $R$ , можно почерпнуть из теории порядков:

- ▶  $\forall x \neg R(x, x)$ : отношение  $R$  **антирефлексивно**
- ▶  $\forall x \ \forall y \ \forall z \ (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z))$ : отношение  $R$  **транзитивно**
- ▶  $\exists x \ \forall y \neg R(x, y)$ : существует предмет, **максимальный** относительно  $R$

**Если отношение  $R$  антирефлексивно и транзитивно, то существует предмет, максимальный относительно  $R$**

Иными словами,

**Если  $R$  — отношение **строгого частичного порядка**, то существует предмет, максимальный относительно  $R$**

**Утверждение.** Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

**Доказательство.** Вот пример такого предложения  $\varphi$ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

**Если  $R$  — отношение строгого частичного порядка, то существует предмет, максимальный относительно  $R$**

Как известно (?), в любом **конечном** частично упорядоченном множестве существует максимальный элемент

(А если не известно, то легко доказывается по индукции или получается из более общего утверждения — **леммы Цорна**) ▼

**Утверждение.** Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

---

Проверить общезначимость формулы ЛП при помощи полного перебора интерпретаций оказывается крайне затруднительно:

- ▶ Интерпретаций бесконечно много
- ▶ Перебирать бесконечные интерпретации проблематично
- ▶ Ограничить перебор только конечными интерпретациями невозможно

Чтобы научиться решать эту задачу, придётся изучить более нетривиальные методы, и прежде всего изучим самый *идеологически простой и универсальный*:

**метод семантических таблиц**