

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 7

Логика предикатов:
можно ли проверить
общезначимость формулы «в лоб»?

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Для **логики высказываний** существует очень простой способ проверки общезначимости формул «в лоб»:

- ▶ Вспомнить, что общезначимость формулы в этой логике — это то же самое, что равенство константе 1 в булевой алгебре
- ▶ **Перебрать** все наборы значений булевых переменных формулы и для каждого проверить, принимает ли реализуемая функция значение 0
- ▶ Если найден хотя бы один такой набор, то формула необщезначима; иначе формула общезначима

А можно ли адаптировать этот метод проверки общезначимости к логике предикатов?

«Перебрать все наборы значений булевых переменных формулы» — в ЛВ это «**Перебрать все интерпретации формулы**»

«Реализуемая функция принимает значение 0» — в ЛВ это «**Формула не выполняется в интерпретации**»

Значит, прямое обобщение «лобового» способа проверки общезначимости формулы φ на логику предикатов выглядит так:

- ▶ Перебрать всевозможные интерпретации
- ▶ Для каждой (очередной) интерпретации \mathcal{I} проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$
- ▶ Если обнаружена интерпретация \mathcal{I} , такая что $\mathcal{I} \not\models \varphi$, то формула необщезначима
- ▶ Если все интерпретации перебраны и для каждой показано соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$, то формула общезначима

Но всё не так просто:

- ▶ Как задать интерпретацию с бесконечной предметной областью?
- ▶ Как проверить истинность формулы в такой интерпретации?
- ▶ Как перебрать «ужасно»-бесконечное число интерпретаций?

Если бы можно было ограничиться только **конечными** интерпретациями, то проблем бы было намного меньше, но ...

Утверждение. Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} :

- ▶ Предметная область — множество всех натуральных чисел
- ▶ $\overline{R}(a, b) = \mathfrak{t} \iff a < b$

Тогда:

- ▶ $\mathcal{I} \models \forall x \neg R(x, x)$, т.к. никакое число не меньше себя
- ▶ $\mathcal{I} \models \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z))$, т.к. если $a < b$ и $b < c$, то обязательно $a < c$
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \exists x \forall y \neg R(x, y)$, т.к. среди натуральных чисел не существует максимального

Следовательно, $\mathcal{I} \not\models \varphi$, и предложение φ **необщезначимо**

Утверждение. Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

Общее истолкование этой формулы, не зависящее от оценки символа R , можно почерпнуть из теории порядков:

- ▶ $\forall x \neg R(x, x)$: отношение R **антирефлексивно**
- ▶ $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z))$: отношение R **транзитивно**
- ▶ $\exists x \forall y \neg R(x, y)$: существует предмет, **максимальный** относительно R

Если отношение R антирефлексивно и транзитивно, то существует предмет, максимальный относительно R

Иными словами,

Если R — отношение **строгого частичного порядка, то существует предмет, максимальный относительно R**

Утверждение. Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

Если R — отношение строгого частичного порядка, то существует предмет, максимальный относительно R

Как известно (?), в любом **конечном** частично упорядоченном множестве существует максимальный элемент

(А если не известно, то легко доказывается по индукции или получается из более общего утверждения — **леммы Цорна**) ▼

Утверждение. Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

Проверить общезначимость формулы ЛП при помощи полного перебора интерпретаций оказывается крайне затруднительно:

- ▶ Интерпретаций бесконечно много
- ▶ Перебирать бесконечные интерпретации проблематично
- ▶ Ограничить перебор только конечными интерпретациями невозможно

Чтобы научиться решать эту задачу, придётся изучить более нетривиальные методы, и прежде всего изучим самый *идеологически простой* и *универсальный*:

метод семантических таблиц