# Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 37

Избрание лидера и построение остовного дерева:
алгоритм Галлагера-Хамблета-Спиры (GHS)

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

# Выборы и построение остовного дерева

Задачу построения остовного дерева в р.с. можно поставить так: требуется в каждом узле $p$ выделить подмножество $\mathcal{N}_p$ множества соседей ($Neigh_p$) так, чтобы для некотрого остовного дерева $T$, общего для всех узлов, $\mathcal{N}_p$ в каждом узле было множеством всех соседей $p$ в $T$

Алгоритмы построения остовного дерева тесно связаны с алгоритмами избрания лидера

Пусть $C_E$ и $C_T$ — коммуникационные сложности задачи избрания лидера и построения остовного дерева соответственно для произвольной связной топологии $G = (V, E)$

# Выборы и построение остовного дерева

Избрать лидера можно так:

- построить остовное дерево сети и
- избрать лидера в дереве со сложностью $O(|V|)$

Значит, в частности, $C_E \leq C_T + O(|V|)$

Построить остовное дерево можно так:

- избрать лидера и
- запустить из лидера алгоритм эха со сложностью $2|E|$

Значит, в частности, $C_T \leq C_E + 2|E|$

Известна нижняя оценка сложности избрания лидера в произвольной связной топологии (и в любом классе топологий, включающих все ко́льца): $\Omega(|V| \log |V| + |E|)$

Следовательно, чтобы научиться избирать лидера с наилучшей коммуникационной сложностью ($\Theta(|V| \log |V| + |E|)$), необходимо и достаточно научиться вычислять остовное дерево с этой сложностью

# GHS: вступление, допущения

Алгоритм Галлагера-Хамблета-Спиры (GHS) — это описанный дальше распределённый алгоритм построения остовного дерева, предназначенный для произвольной связной топологии и имеющий коммуникационную сложность $O(|V| \log |V| + |E|)$ (в худшем случае)

В GHS используются следующие основные допущения:

1. Рассматривается произвольный связный взвешенный граф топологии $\Gamma = (G, \omega)$, где $G = (V, E)$
2. Разным рёбрам приписаны разные веса ($e_1 \neq e_2 \Rightarrow \omega(e_1) \neq \omega(e_2)$)
3. Каждый узел $p$ знает множество всех своих соседей ($Neigh_p$) и веса инцидентных ему рёбер ($\omega_p[q] = \omega(p - q)$)
4. Все узлы являются инициаторами и отличаются только знаниями из (3)

Весом взевешенного графа назовём сумму весов всех рёбер этого графа

Минимальное остовное дерево ($MST$) графа — это остовное дерево этого графа, имеющее наименьший вес среди всех остовных деревьев

# Минимальные остовные деревья

**Утверждение 1. В основных допущениях существует единственное MST графа $\Gamma$**

Доказательство.

*Существование:* множество всех остовных деревьев графа конечно, а значит, среди них есть такое, вес которого минимален

*Единственность: предположим от противного*, что существуют два различных MST: $T_1 = (V, E_1)$ и $T_2 = (V, E_2)$

Рассмотрим ребро $e$ наименьшего веса, содержащееся в одном из этих деревьев и не содержащееся в другом

*Без ограничения общности* положим, что $e \in E_1$ и $e \notin E_2$

Тогда в графе $T_2' = (V, E_2 \cup \{e\})$ содержится цикл $\mathcal{C}$

Так как в $T_1$ нет циклов, то в $\mathcal{C}$ содержится ребро $e'$, не входящее в $T_1$

По выбору ребра $e$, верно $\omega(e) < \omega(e')$

Значит, $(V, (E_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ — дерево, имеющее меньший вес, чем $T_2$ (*противоречие*) ▼

# Минимальные остовные деревья

Основываясь на этом утверждении, дальше будем писать просто «MST», имея в виду единственное MST графа Г

Фрагментами будем называть поддеревья MST

Ребро $e$ относительно фрагмента $F$ будем называть

- внутренним, если обе его вершины принадлежат $F$,
- внешним, если обе не принадлежат, и
- граничным, если одна принадлежит и одна не принадлежит

Минимальным граничным ребром фрагмента будем называть граничное ребро, имеющее наименьший вес среди всех граничных рёбер

**Утверждение 2 (Д.з. 1). Если справедливы основные допущения, $F = (V_F, E_F)$ — фрагмент и $e = (v, w)$ — минимальное граничное ребро фрагмента $F$, то $(V_F \cup \{v, w\}, E_F \cup \{e\})$ — фрагмент**

# GHS: общее описание

На каждом этапе выполнения алгоритма каждый узел принадлежит некоторому фрагменту, вычисленному алгоритмом (текущему фрагменту этого узла)

В начале выполнения узел $p$ принадлежит фрагменту $(\{p\}, \emptyset)$

Если фрагменты $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$ не пересекаются и $e$ — граничное ребро для них обоих и минимальное граничное ребро для одного из них, то при выполнении этого алгоритма $F_1$ и $F_2$ могут быть объединены по ребру $e$ в дерево $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e\})$, которое по утверждению 2 также является фрагментом

# GHS: общее описание

Каждому фрагменту присваивается особое целое число — ранг

Фрагмент большего ранга (по сравнению с заданным) будем называть старшим, меньшего — младшим, равного — ровесником

Фрагмент вида $(\{p\}, \emptyset)$ имеет ранг 0

Ранг объединения фрагментов $F_1$ и $F_2$ с рангами $r_1$ и $r_2$ равен

- рангу старшего фрагмента, если $r_1 \neq r_2$, и
- $r_1 + 1$, если $r_1 = r_2$

Алгоритм GHS строит MST последовательным объединением фрагментов, начиная с фрагментов ранга 0 и оканчивая фрагментом, представляющим собой всё MST

# GHS: общее описание

Каждому фрагменту с хотя бы одним ребром присваивается имя

Имя объединения ровесников — это вес соединяющего их ребра

Объединению фрагментов разных рангов присваивается имя старшего фрагмента

Ребро, вес которого является именем фрагмента, будем называть стержнем, и узлы, инцидентные стержню, будем называть стержневыми

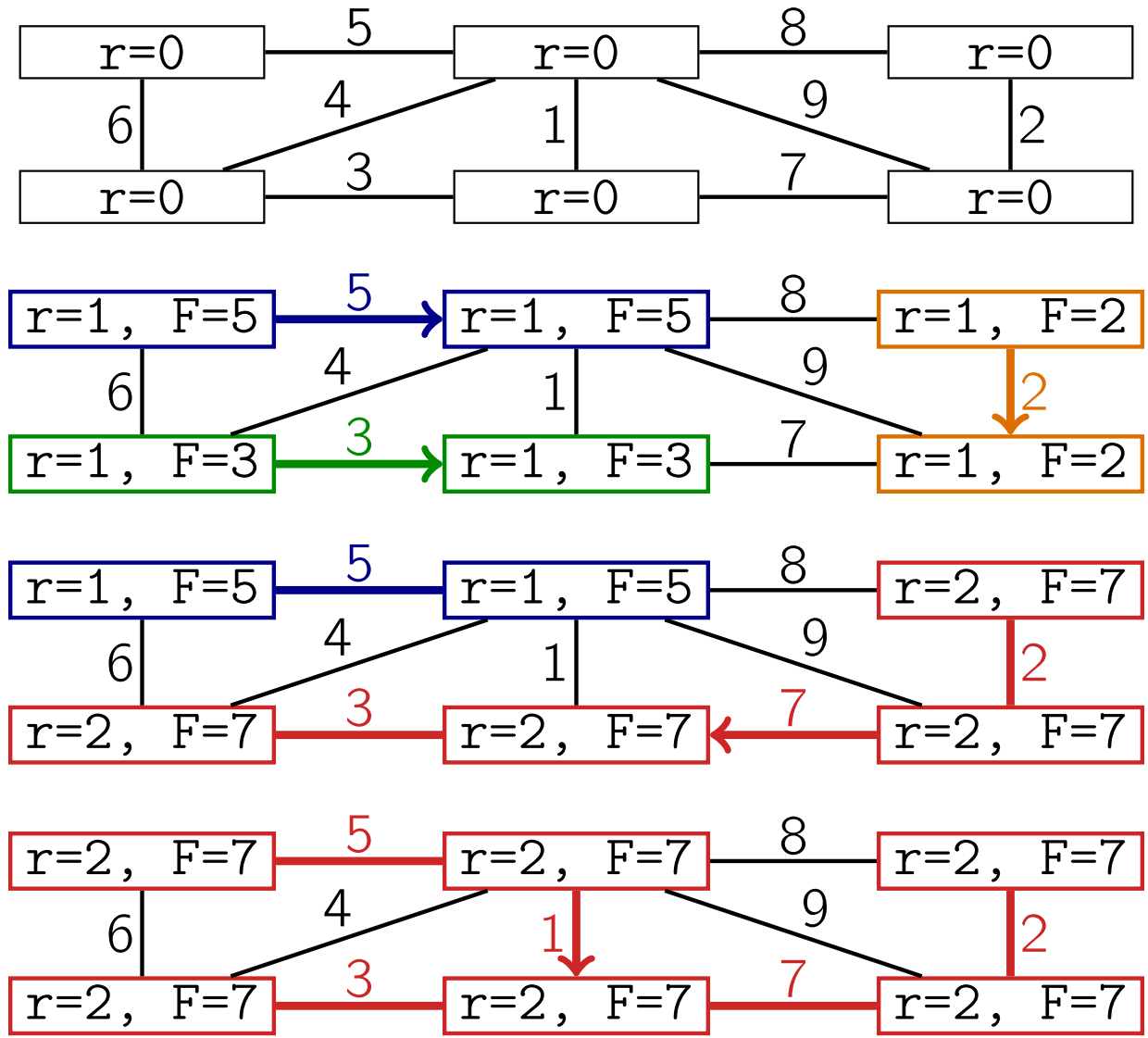
Соседа узла в его текущем фрагменте на другом конце канала по направлению к стержню будем называть родителем этого узла, а остальных соседей в текущем фрагменте — детьми

После объединения фрагментов ранг и имя рассылаются всем узлам фрагмента в направлении от стержня

Так как веса всех рёбер попарно различны, то имена различных фрагментов различны и граничность ребра означает неравенство имён узлов этого ребра

# GHS: общее описание

**Пример** построения MST из фрагментов (r — ранг, F — имя):



# GHS: простейшие свойства

**Утверждение 3.** **В любом фрагменте любого ранга $r \in \mathbb{N}_0$ содержится не менее $2^r$ узлов**

Доказательство (индукцией по способам объединения фрагментов).

В каждом фрагменте ранга 0 содержится ровно $2^0 = 1$ узел

Если объединяются фрагменты разных рангов и старший $F$ имеет ранг $r$ и содержит не менее $2^r$ узлов, то ранг объединения равен $r$, и в объединении содержатся по крайней мере все узлы $F$, и их не менее $2^r$

Если объединяются фрагменты одного ранга $r$ и каждый содержит не менее $2^r$ узлов, то объединение имеет ранг $(r + 1)$ и содержит не менее $(2^r + 2^r) = 2^{r+1}$ узлов ▼

# GHS: простейшие свойства

**Утверждение 4.** **Для описанного способа построения MST значение ранга в каждом узле изменяется не более $\log_2 |V|$ раз**

Доказательство.

По утверждению 3, значение ранга фрагмента не может быть больше $\log_2 |V|$

При изменении ранга в узле он увеличивается хотя бы на 1

Значит, изменение может произойти не более $\log_2 |V|$ раз ▼

**Следствие.** **Для описанного способа построения MST суммарное число изменений рангов в узлах сети не превосходит $|V| \log_2 |V|$**

# GHS: правила присоединения фрагмента

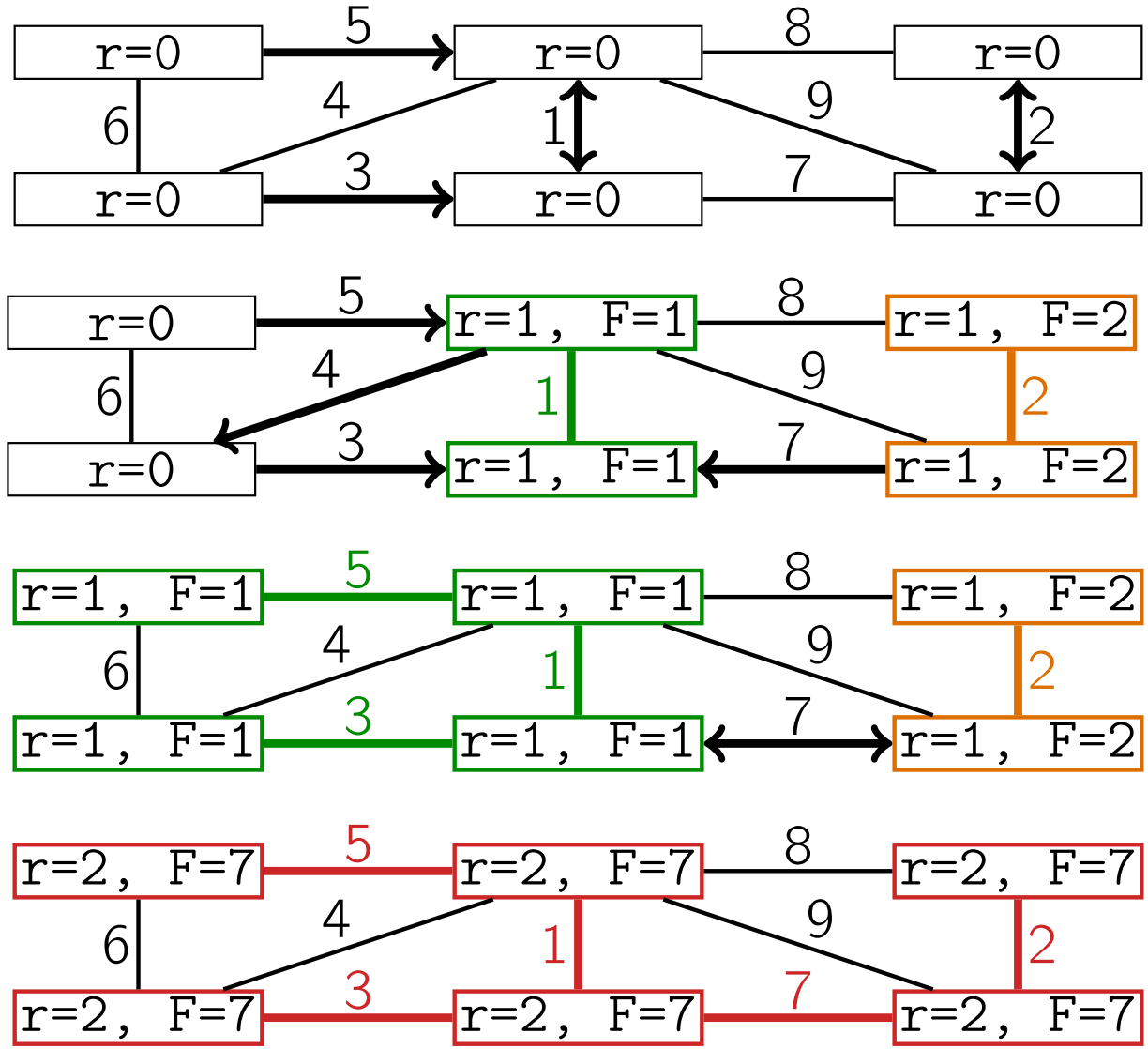
Объединение фрагментов в GHS носит «полуодносторонний» характер:
либо младший фрагмент присоединяется к старшему,
либо ровесники присоединяются друг к другу

Более точно, присоединение фрагмента $F$ к фрагменту $G$ по минимальному граничному ребру $e_F$ фрагмента $F$ в GHS будет следовать трём правилам:

1. Если $G$ — старший, то узлы фрагмента $F$ присоединяются к фрагменту $G$: изменяют свои имя и ранг на имя и ранг $G$
2. Если $F$ и $G$ — ровесники и $e_F$ — минимальное граничное ребро фрагмента $G$, то узлы фрагментов $F$ и $G$ присоединяются друг к другу: увеличивают ранг и приобретют имя $e_F$
3. В остальных случаях $F$ ожидает, когда станет применимым одно из правил (1), (2)

# GHS: правила присоединения фрагмента

**Пример** объединения фрагментов в GHS по правилам (1)–(3)



# GHS: переменные узла $p$

- $name_p : \Omega^{\perp}/\perp$ — имя текущего фрагмента ($\Omega$ — тип весов)
- $rank_p : \mathbb{N}_0/0$ — ранг текущего фрагмента
- $parent_p : Neigh_p^{\perp}/\perp$ — родитель в текущем фрагменте
- $cfrag_p[q] : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}^{\perp}/\perp$ для каждого $q \in Neigh_p$ — тип ребра $p - q$
  - $\mathbb{t}$ означает, что ребро входит в MST
  - $\mathbb{f}$ означает, что ребро не входит в MST
  - $\perp$ означает, что принадлежность ребра MST неясна
- $state_p : \{search, found\}/found$ — режим работы узла
  - *search* означает поиск минимального граничного ребра
  - *found* означает, что минимальное граничное ребро найдено
- $\omega best_p : \Omega \cup \{\infty\}/\infty$ — вес наилучшего известного узлу граничного ребра ($\infty$ означает, что ни одно подходящее ребро не известно)
- $ctest_p, cbest_p : Neigh_p^{\perp}/\perp$ — вероятные направления к минимальному граничному ребру
- $cN_p : \mathbb{N}_0/0$ — счётчик рёбер, исследованных при поиске граничного

# GHS: виды сообщений

- (**connect**, *rank*) — отправляется в минимальное граничное ребро для обозначения готовности фрагмента присоединиться
- (**initiate**, *rank*, *name*, *state*) — принимается по минимальному граничному ребру для начала присоединения и рассылается узлам фрагмента
- (**test**, *rank*, *name*) — отправляется в инцидентное ребро типа $\perp$ наименьшего веса в рамках поиска минимального граничного ребра
- **reject** — отправляется в ответ на **test** во внутреннее ребро
- **accept** — отправляется в ответ на **test** в граничное ребро
- (**report**, $\omega best$) — отправляется родителю со значением $\omega best$ — наименьшим найденным весом граничного ребра
- **changeroot** — намерение присоединиться, передаваемое внутри фрагмента от стержня до узла, которому инцидентно найденное минимальное граничное ребро

# GHS: инициализация узла $p$

Первое однократно выполняющееся действие каждого узла $p$:

1. $q = \underset{q \in Neigh_p}{\mathrm{Argmin}}\, \omega_p[q]$
2. $cfrag_p[q] := \mathbb{t}$;
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{connect}, 0)$

---

Узел в тривиальном фрагменте ранга 0 очевидным образом находит минимальное граничное ребро и объявляет о готовности присоединиться по этому ребру

---

---

После этого каждый узел $p$ в бесконечном цикле

- ожидает выполнения хотя бы одного из предусловий, описанных далее,
- произвольно выбирает одно из выполненных предусловий и
- выполняет процедуру, отвечающую выбранному предусловию

# GHS: приём connect узлом $p$

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение (**connect**, *rank*), где (а) $rank \le rank_p$ и (б) если $rank = rank_p$, то $cfrag_p[q] \neq \perp$ (*т.е. можно применить правило (1) или (2) объединения фрагментов*)

1. $\mathrm{receive}_q$(**connect**, *rank*) для сообщения и $q$ из предусловия
2. Если $rank < rank_p$ (*правило 1*):
   2.1 $cfrag_p[q] := \Bbbt$;
   2.2 $\mathrm{send}_q$(**initiate**, $rank_p$, $name_p$, $state_p$)
3. Если $rank = rank_p$ (*правило 2*):
   $\mathrm{send}_q$(**initiate**, $rank_p + 1$, $\omega_p[q]$, *search*)

---

Узлу $q$ отправляется приказ присоединиться, если он

- младший или
- ровесник и при этом узел $p$ уверен, что $(p, q)$ — минимальное граничное ребро для его текущего фрагмента

Вопрос. Что происходит с сообщением типа **connect** в вычислении в целом, если сейчас для него предусловие не выполнено?

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{initiate}}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$ для произвольного $q \in \mathit{Neigh}_p$
2. $(\mathit{rank}_p, \mathit{name}_p, \mathit{state}_p, \mathit{parent}_p) := (\mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state}, q)$;
3. $(\omega\mathit{best}_p, \mathit{cbest}_p) := (\infty, \perp)$;
4. Для всех $r \in \mathit{Neigh}_p \setminus \{q\}$, таких что $\mathit{cfrag}_p[r] = \mathbb{t}$:
   $\mathrm{send}_r(\textbf{initiate}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$
5. Если $\mathit{state}_p = \mathit{search}$:
   5.1 $\mathit{cN}_p := 0$;
   5.2 $\mathit{TEST}_p$

---

После получения приказа о присоединении узел

- обновляет информацию о фрагменте (ранг, имя, статус поиска минимального граничного ребра, родитель),

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{initiate}}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$ для произвольного $q \in \mathit{Neigh}_p$
2. $(\mathit{rank}_p, \mathit{name}_p, \mathit{state}_p, \mathit{parent}_p) := (\mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state}, q)$;
3. $(\omega\mathit{best}_p, \mathit{cbest}_p) := (\infty, \perp)$;
4. Для всех $r \in \mathit{Neigh}_p \setminus \{q\}$, таких что $\mathit{cfrag}_p[r] = \mathbb{t}$:
   $\mathrm{send}_r(\textbf{initiate}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$
5. Если $\mathit{state}_p = \mathit{search}$:
   5.1 $\mathit{cN}_p := 0$;
   5.2 $\mathit{TEST}_p$

---

После получения приказа о присоединении узел

- «сбрасывает» информацию о наилучшем известном граничном ребре,

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{initiate}}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$ для произвольного $q \in \mathit{Neigh}_p$
2. $(\mathit{rank}_p, \mathit{name}_p, \mathit{state}_p, \mathit{parent}_p) := (\mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state}, q)$;
3. $(\omega\mathit{best}_p, \mathit{cbest}_p) := (\infty, \perp)$;
4. Для всех $r \in \mathit{Neigh}_p \setminus \{q\}$, таких что $\mathit{cfrag}_p[r] = \mathbb{t}$:
   $\mathrm{send}_r(\textbf{initiate}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$
5. Если $\mathit{state}_p = \mathit{search}$:
   5.1 $\mathit{cN}_p := 0$;
   5.2 $\mathit{TEST}_p$

---

После получения приказа о присоединении узел

- пересылает детям в «старом» фрагменте приказ о присоединении и

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{initiate}}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$ для произвольного $q \in \mathit{Neigh}_p$
2. $(\mathit{rank}_p, \mathit{name}_p, \mathit{state}_p, \mathit{parent}_p) := (\mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state}, q)$;
3. $(\omega\mathit{best}_p, \mathit{cbest}_p) := (\infty, \perp)$;
4. Для всех $r \in \mathit{Neigh}_p \setminus \{q\}$, таких что $\mathit{cfrag}_p[r] = \mathbb{t}$:
   $\mathrm{send}_r(\textbf{initiate}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$
5. Если $\mathit{state}_p = \mathit{search}$:
   5.1 $\mathit{cN}_p := 0$;
   5.2 $\mathit{TEST}_p$

---

После получения приказа о присоединении узел

- если в приказе говорится продолжить поиск минимального граничного ребра, то присоединяется к поиску при помощи (*описанной далее*) процедуры $\mathit{TEST}_p$

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{initiate}}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$ для произвольного $q \in \mathit{Neigh}_p$
2. $(\mathit{rank}_p, \mathit{name}_p, \mathit{state}_p, \mathit{parent}_p) := (\mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state}, q)$;
3. $(\omega\mathit{best}_p, \mathit{cbest}_p) := (\infty, \perp)$;
4. Для всех $r \in \mathit{Neigh}_p \setminus \{q\}$, таких что $\mathit{cfrag}_p[r] = \mathbb{t}$:
   $\mathrm{send}_r(\textbf{initiate}, \mathit{rank}, \mathit{name}, \mathit{state})$
5. Если $\mathit{state}_p = \mathit{search}$:
   - 5.1 $\mathit{cN}_p := 0$;
   - 5.2 $\mathit{TEST}_p$

---

Вопрос.

Зачем узел сбрасывает информацию о наилучшем граничном ребре?
Останется ли алгоритм корректным, если этого не делать?

# GHS: приём initiate узлом $p$

Процедура $TEST_p$:

1. Если $\exists q \in Neigh_p : cfrag_p[q] = \perp$, то:
   - 1.1 Выбрать указанный выше $q$ с наименьшим значением $\omega_p[q]$
   - 1.2 $ctest_p := q$;
   - 1.3 $\mathrm{send}_q(\textbf{test}, rank_p, name_p)$
2. Иначе:
   - 2.1 $ctest_p := \perp$;
   - 2.2 $REPORT_P$

---

Узел $p$ в рамках поиска минимального граничного ребра

- выбирает инцидентное ребро типа $\perp$ (неопробованное) с наименьшим весом и отправляет в него сообщение **test** для проверки того, является ли оно граничным,
- а если таких рёбер нет, то считает поиск завершённым и докладывает о результатах родителю

# GHS: приём initiate узлом $p$

Процедура $REPORT_p$:

1. Если $cN_p = |\{q \mid q \in Neigh_p \setminus \{parent_p\},\ cfrag_p = \Updownarrow\}|$ и $ctest_p = \perp$:
   1.1 $state_p := found$;
   1.2 $\mathrm{send}_{parent_p}(\textbf{report}, \omega best_p)$

---

Доклад о результатах поиска наилучшего граничного ребра устроен так

Если узел получил от всех детей мнения о наилучших граничных рёбрах и завершил свой локальный поиск наилучшего граничного ребра, то он отправляет вес наилучшего известного ему граничного ребра родителю

# GHS: приём test узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$
есть сообщение (**test**, *rank*, *name*), где $rank \leq rank_p$

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{test}}, rank, name)$ для сообщения и $q$ из предусловия
2. Если $name \neq name_p$ (*это граничное ребро*): $\mathrm{send}_q(\textbf{accept})$
3. Иначе (*это внутреннее ребро*):
   - 3.1 Если $cfrag_p[q] = \bot$: $cfrag_p[q] := \mathbb{f}$;
   - 3.2 Если $q \neq ctest_p$: $\mathrm{send}_q(\textbf{reject})$
     Иначе: $TEST_P$

---

Если $p$ получил от узла $q$ нестаршего фрагмента сообщение о проверке граничности ребра, то:

- Если фрагменты $p$ и $q$ разные, то $p$ отвечает, что ребро граничное
- Иначе $p$ меняет тип ребра на «внутреннее» и в зависимости от того, проверяет ли сейчас это ребро, либо продолжает перебирать инцидентные рёбра (запускает $TEST_p$), либо сообщает $q$ о том, что ребро внутреннее

# GHS: приём test узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$
есть сообщение (**test**, *rank*, *name*), где $rank \leq rank_p$

1. $\mathrm{receive}_q$(**test**, *rank*, *name*) для сообщения и $q$ из предусловия
2. Если $name \neq name_p$ (*это граничное ребро*): $\mathrm{send}_q$(**accept**)
3. Иначе (*это внутреннее ребро*):
   - 3.1 Если $cfrag_p[q] = \bot$: $cfrag_p[q] := \mathbb{f}$;
   - 3.2 Если $q \neq ctest_p$: $\mathrm{send}_q$(**reject**)
     Иначе: $TEST_P$

---

Вопрос. Почему блокируется приём сообщения **test** от старшего фрагмента, и что происходит с этим сообщением в вычислении в целом?

Вопрос. Почему в (3.2) считается правильным иногда не отправлять ожидаемый ответ **reject** («ребро не граничное») и вместо этого выполнять $TEST_p$?

# GHS: приём accept узлом $p$

Предусловие:
в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение **accept**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{accept}})$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. $ctest_p := \bot$;
3. Если $\omega_p[q] < \omega best_p$:
   3.1 $\omega best_p := \omega_p[q]$;
   3.2 $cbest_p := q$;
4. $REPORT_p$

---

Если на сообщение **test**, отправленное в $TEST_p$, получен ответ, что проверяемое ребро — граничное, то $p$ признаёт это ребро наилучшим инцидентным, завершает поиск и докладывает родителю

Вопрос. Зачем «сбрасывается» значение $ctest_p$?
Останется ли алгоритм корректным, если удалить этот «сброс»?

# GHS: приём reject узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение **reject**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{reject}})$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. Если $cfrag_p[q] = \perp$: $cfrag_p[q] := \mathbb{f}$;
3. $TEST_p$

---

Если на сообщение **test** получен ответ, что проверяемое ребро является внутренним, то тип ребра соответственно обновляется и поиск наилучшего инцидентного граничного ребра продолжается

# GHS: приём report узлом $p$

Предусловие: $state_p = found$ и в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **report**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{report}}, \omega)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. Если $q \neq parent_p$:
   - 2.1 Если $\omega < \omega best_p$: $(\omega best_p, cbest_p) := (\omega, q)$;
   - 2.2 $cN_p := cN_p + 1$;
   - 2.3 $REPORT_p$
3. Иначе:
   - 3.1 Если $\omega > \omega best_p$: $CHANGEROOT_p$
   - 3.2 Иначе: если $\omega = \omega best_p = \infty$, то завершить выполнение узла

---

Если доклад получен от ребёнка, то $p$ обновляет мнение о наилучшем граничном ребре и докладывает родителю

# GHS: приём report узлом $p$

Предусловие: $state_p = found$ и в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **report**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{report}}, \omega)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. Если $q \neq parent_p$:
   - 2.1 Если $\omega < \omega best_p$: $(\omega best_p, cbest_p) := (\omega, q)$;
   - 2.2 $cN_p := cN_p + 1$;
   - 2.3 $REPORT_p$
3. Иначе:
   - 3.1 Если $\omega > \omega best_p$: $CHANGEROOT_p$
   - 3.2 Иначе: если $\omega = \omega best_p = \infty$, то завершить выполнение узла

---

Если же доклад получен от родителя, то это доклад от одного стержневого узла другому (они и только они являются взаимными родителями), и стержневой узел, нашедший ребро лучшего веса, запускает процедуру $CHANGEROOT_p$ отправки сообщения **connect** в ребро с этим весом

# GHS: приём report узлом $p$

Предусловие: $state_p = found$ и в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **report**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{report}}, \omega)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. Если $q \neq parent_p$:
   - 2.1 Если $\omega < \omega best_p$: $(\omega best_p, cbest_p) := (\omega, q)$;
   - 2.2 $cN_p := cN_p + 1$;
   - 2.3 $REPORT_p$
3. Иначе:
   - 3.1 Если $\omega > \omega best_p$: $CHANGEROOT_p$
   - 3.2 Иначе: если $\omega = \omega best_p = \infty$, то завершить выполнение узла

---

Если оба стержневых узла не нашли ни одного граничного ребра, то процедура построения MST в узле завершается

# GHS: приём report узлом $p$

Предусловие: $state_p = found$ и в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **report**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{report}}, \omega)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. Если $q \neq parent_p$:
   - 2.1 Если $\omega < \omega best_p$: $(\omega best_p, cbest_p) := (\omega, q)$;
   - 2.2 $cN_p := cN_p + 1$;
   - 2.3 $REPORT_p$
3. Иначе:
   - 3.1 Если $\omega > \omega best_p$: $CHANGEROOT_p$
   - 3.2 Иначе: если $\omega = \omega best_p = \infty$, то завершить выполнение узла

---

Вопрос. Почему сообщение типа **report** может быть получено только от узла текущего фрагмента?

# GHS: приём report узлом $p$

Процедура $CHANGEROOT_p$:

1. Если $cfrag_p[cbest_p] = \mathbb{t}$: $\mathrm{send}_{cbest_p}$(**changeroot**)
2. Иначе:
   - 2.1 $\mathrm{send}_{cbest_p}$(**connect**, $rank_p$)
   - 2.2 $cfrag_p[cbest_p] := \mathbb{t}$;

---

Сообщение **changeroot** передаётся внутри фрагмента в сторону узла, которому инцидентно найденное минимальное граничное ребро

В это ребро отправляется сообщение **connect** о намерении объединиться с фрагментом на другом конце ребра

# GHS: приём changeroot в узле $p$

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение **changeroot**

1. $\mathrm{receive}_q(\underline{\textbf{changeroot}})$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. $CHANGEROOT_p$

---

**Д.з. 2.** Ответьте хотя бы на три поставленных ранее вопроса

# GHS: свойства

**Теорема. Любое вычисление GHS конечно, и в заключительной конфигурации условие $cfrag_p[q] = \mathbb{t}$ верно тогда и только тогда, когда ребро $p - q$ входит в MST**

Доказательство (основная идея).

Из описания и подробных пояснений должно быть ясно, что сообщение **connect** отправляется только в минимальное граничное ребро фрагмента

По утверждению 2, если показать, что каждый фрагмент, имеющий хотя бы одно граничное ребро, отправляет сообщение **connect**, то алгоритмом действительно за конечное число действий строится MST в том смысле, как написано в условии теоремы

# GHS: свойства

Доказательство (основная идея).

*Предположим от противного*, что в вычислении возникает фрагмент, отличный от MST, ни один узел которого никогда не отправляет **connect**

Согласно описанию алгоритма, это означает, что в каждом фрагменте на очередном этапе выполнения действий этого фрагмента происходит блокировка: бесконечное безрезультатное ожидание того, что предусловие очередного действия станет истинным

Согласно схеме пересылки сообщений внутри фрагмента и между фрагментами, блокировка фрагмента $F_1$ (с рангом $rank_1$ и именем $name_1$) возможна только в тех случаях, когда сообщение из $F_1$ отправляется узлу другого фрагмента $F_2$ (с рангом $rank_2$ и именем $name_2$) и никогда не принимается в $F_2$ из-за невыполненного предусловия, и это возможно только для двух сообщений:

1. (**connect**, $rank_1$)
2. (**test**, $rank_1$, $name_1$)

# GHS: свойства

Доказательство (основная идея).

Для каждого из этих видов сообщений невозможность принять его в $F_2$ означает, что верно одно из следующих условий ($e_1$ и $e_2$ — соответственно миниальные граничные рёбра фрагментов $F_1$ и $F_2$):

1. $rank_1 > rank_2$
2. $rank_1 = rank_2$ и $\omega(e_1) > \omega(e_2)$
3. $rank_1 = rank_2$, $\omega(e_1) = \omega(e_2)$, и в $F_2$ выполняется поиск минимального граничного ребра

**Д.з. 3.** Показать, что в GHS недостижимы конфигурации, в которых для каждого фрагмента выполнено хотя бы одного из трёх условий выше

Это означает, что если существует текущий фрагмент, отличный от MST, то существует и незаблокированный фрагмент (*противоречие*) ▼

**Д.з. 4.** Оценить, сколько сообщений каждого типа отправляется при выполнении алгоритма, и на основании этой оценки показать, что коммуникационная сложность GHS не превосходит $2|V|\log_2|V| + 5|E|$