

Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 37

Избрание лидера и построение остовного дерева:
алгоритм Галлагера-Хамблета-Спиры (GHS)

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Выборы и построение остовного дерева

Задачу построения остовного дерева в р.с. можно поставить так: требуется в каждом узле p выделить подмножество \mathcal{N}_p множества соседей ($Neigh_p$) так, чтобы для некоторого остовного дерева T для каждого узла p множество \mathcal{N}_p было множеством всех соседей p в T

Алгоритмы построения остовного дерева тесно связаны с **алгоритмами избрания лидера**

Пусть C_E и C_T — коммуникационные сложности **задачи избрания лидера** и **построения остовного дерева** соответственно для произвольной связной топологии $\Gamma = (V, E)$

Выборы и построение остовного дерева

Избрать лидера можно так:

- ▶ построить остовное дерево сети и
- ▶ избрать лидера в дереве со сложностью $O(|V|)$

Значит, в частности, $C_E \leq C_T + O(|V|)$

Построить остовное дерево можно так:

- ▶ избрать лидера и
- ▶ запустить из лидера алгоритм эха со сложностью $2|E|$

Значит, в частности, $C_T \leq C_E + 2|E|$

Известна нижняя оценка сложности избрания лидера в произвольной связной топологии (и в любом классе топологий, включающих все кольца): $\Omega(|V| \log |V| + |E|)$

Следовательно, чтобы научиться избирать лидера с наилучшей коммуникационной сложностью ($\Theta(|V| \log |V| + |E|)$), необходимо и достаточно научиться вычислять остовное дерево с этой сложностью

GHS: вступление, допущения

Алгоритм Галлагера-Хамблета-Спирсы (GHS) — это описанный дальше распределённый алгоритм построения остовного дерева, предназначенный для произвольной связной топологии и имеющий коммуникационную сложность $O(|V| \log |V| + |E|)$ (в худшем случае)

В GHS используются следующие допущения и соглашения:

1. $\Gamma = (V, E)$ — граф топологии
2. Каждому ребру e из E приписан вес $\omega(e)$ — число (\mathbb{N}_0 , \mathbb{Z} или \mathbb{R})
Разным рёбрам приписаны разные веса
3. Каждый узел p знает множество всех своих соседей ($Neigh_p$) и веса инцидентных ему рёбер ($\omega_p[q] = \omega(p - q)$)
4. Все узлы являются **инициаторами**
То есть единственное различие узлов — это знания (3),
и все узлы начинают выполнять действия,
не дожидаясь приёма сообщения

Минимальные остовные деревья

Весом графа назовём сумму весов рёбер этого графа

Минимальное остовное дерево (*MST*) — это **остовное дерево**, имеющее наименьший вес среди всех остовных деревьев

Утверждение 1. Если все веса рёбер графа попарно различны, то существует единственное **MST** этого графа

Доказательство. Предположим от противного, что существуют два различных **MST**: $T_1 = (V, E_1)$ и $T_2 = (V, E_2)$

Рассмотрим ребро e наименьшего веса, содержащееся в одном из этих деревьев и не содержащееся в другом

Без ограничения общности положим, что $e \in E_1$ и $e \notin E_2$

Тогда в графе $T'_2 = (V, E_2 \cup \{e\})$ содержится цикл \mathcal{C}

Так как в T_1 нет циклов, то в \mathcal{C} содержится ребро e' , не входящее в T_1

По выбору ребра e , верно $\omega(e) < \omega(e')$

Значит, $(V, (E_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ — дерево, имеющее меньший вес, чем T_2 (*противоречие*) ▼

Минимальные остовные деревья

Основываясь на этом утверждении, дальше будем писать просто «MST», имея в виду единственное MST графа G

Фрагментами будем называть поддеревья MST

Ребро e относительно фрагмента F будем называть

- ▶ **внутренним**, если обе его вершины принадлежат F ,
- ▶ **внешним**, если обе не принадлежат, и
- ▶ **граничным**, если одна принадлежит и одна не принадлежит

Минимальным граничным ребром фрагмента будем называть граничное ребро, имеющее наименьший вес среди всех граничных рёбер

Утверждение 2 (Д.з. 1). Если $F = (V_F, E_F)$ — фрагмент и $e = (v, w)$ — **минимальное граничное ребро** фрагмента F , то $(V_F \cup \{v, w\}, E_F \cup \{e\})$ — **фрагмент**

GHS: общее описание

На каждом этапе выполнения алгоритма каждый узел принадлежит некоторому фрагменту, вычисленному алгоритмом (**текущему** фрагменту этого узла)

В начале выполнения узел p принадлежит фрагменту $(\{p\}, \emptyset)$

Если фрагменты $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$ не пересекаются и e — граничное ребро для них обоих и минимальное граничное ребро для одного из них, то при выполнении этого алгоритма F_1 и F_2 могут быть **объединены по ребру** e в дерево $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e\})$, которое **по утверждению 2** также является фрагментом

GHS: общее описание

Каждому фрагменту присваивается особое число — **ранг**

Фрагмент большего ранга (по сравнению с заданным) будем называть **старшим**, меньшего — **младшим**, равного — **ровесником**

Фрагмент вида $(\{p\}, \emptyset)$ имеет ранг 0

Ранг объединения фрагментов F_1 и F_2 с рангами r_1 и r_2 равен

- ▶ рангу старшего фрагмента, если $r_1 \neq r_2$
- ▶ $r_1 + 1$, если $r_1 = r_2$

Каждому фрагменту с хотя бы одним ребром присваивается **имя**

Имя объединения ровесников — это вес соединяющего их ребра

Объединению фрагментов разных рангов присваивается имя старшего фрагмента

GHS: общее описание

Ребро, вес которого является именем фрагмента, будем называть **стержнем**, и узлы, инцидентные стержню, будем называть **стержневыми**

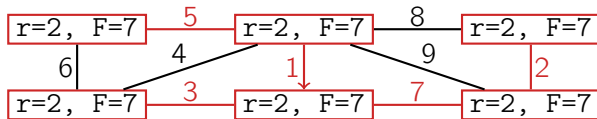
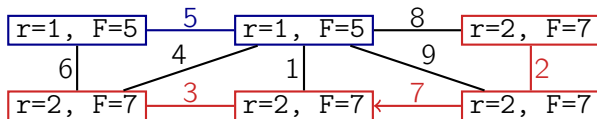
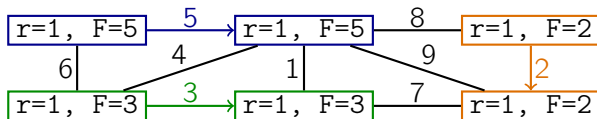
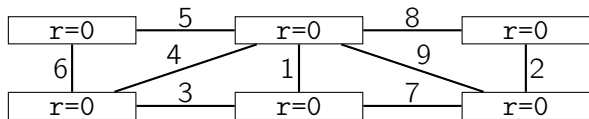
После объединения фрагментов ранг и имя рассылаются всем узлам фрагмента в направлении от стержня

Так как веса всех рёбер попарно различны, то имена различных фрагментов различны и проверка граничности ребра равносильна проверке неравенства имён узлов этого ребра

Алгоритм GHS строит MST последовательным объединением фрагментов, начиная с фрагментов ранга 0 и оканчивая фрагментом, представляющим собой всё MST

GHS: общее описание

Пример построения MST из фрагментов (r — ранг, F — имя):



GHS: простейшие свойства

Утверждение 3. В любом фрагменте любого ранга $r \in \mathbb{N}_0$ содержится не менее 2^r узлов

Доказательство (индукцией по способам объединения фрагментов).

В каждом фрагменте ранга 0 содержится ровно $2^0 = 1$ узел

Если объединяются фрагменты разных рангов, старший F имеет ранг r и содержит не менее 2^r узлов, то ранг объединения равен r , и в объединении содержатся по крайней мере все узлы F , и их не менее 2^r

Если объединяются фрагменты одного ранга r и каждый содержит не менее 2^r узлов, то объединение имеет ранг $(r + 1)$ и содержит не менее $(2^r + 2^r) = 2^{r+1}$ узлов ▼

GHS: простейшие свойства

Утверждение 4. Для описанного способа построения MST значение ранга в каждом узле изменяется не более $\log_2 |V|$ раз

Доказательство.

По утверждению 3, значение ранга фрагмента не может быть больше $\log_2 |V|$

При изменении ранга в узле он увеличивается хотя бы на 1

Значит, изменение может произойти не более $\log_2 |V|$ раз ▼

Следствие. Для описанного способа построения MST суммарное число изменений рангов в узлах сети не превосходит $|V| \log_2 |V|$

GHS: правила присоединения фрагмента

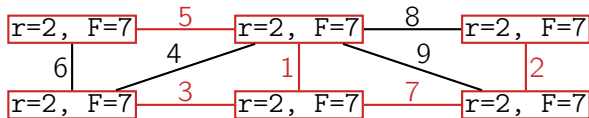
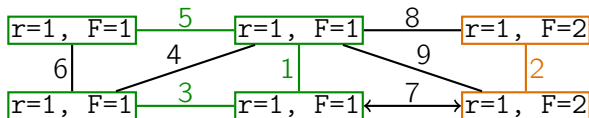
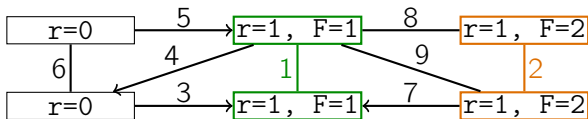
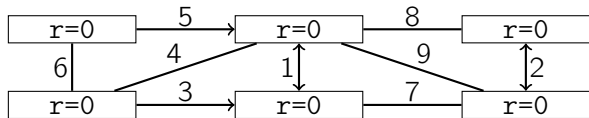
Объединение фрагментов в GHS носит «полуодносторонний» характер: либо младший фрагмент присоединяется к старшему, либо ровесники присоединяются друг к другу

Более точно, **присоединение** фрагмента F к фрагменту G по минимальному граничному ребру e_F для F в GHS будет следовать трём правилам:

1. Если G — старший, то узлы фрагмента F присоединяются к фрагменту G : изменяют свои имя и ранг на имя и ранг G
2. Если F и G — ровесники и e_F — минимальное граничное ребро для G , то узлы F и G присоединяются друг к другу, увеличивая ранг и приобретая имя стержня e_F
3. В остальных случаях F ожидает, когда станет применимым одно из правил (1), (2)

GHS: правила присоединения фрагмента

Пример объединения фрагментов в GHS по правилам (1)–(3)



GHS: переменные узла p

- ▶ $name_p : \Omega^\perp = \perp$ — имя текущего фрагмента (Ω — тип весов)
- ▶ $rank_p : \mathbb{N}_0 = 0$ — ранг текущего фрагмента
- ▶ $parent_p : Neigh_p^\perp = \perp$ — сосед в направлении стержня фрагмента (родитель)
- ▶ $cfrag_p[q] : \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}^\perp = \perp$ для каждого $q \in Neigh_p$ — тип ребра $p - q$
 - ▶ \mathfrak{t} означает, что ребро входит в MST
 - ▶ \mathfrak{f} означает, что ребро не входит в MST
 - ▶ \perp означает, что принадлежность ребра MST неясна
- ▶ $state_p : \{search, found\} = found$ — режим работы узла
 - ▶ $search$ означает поиск минимального граничного ребра
 - ▶ $found$ означает, что минимальное граничное ребро найдено
- ▶ $\omega best_p^\perp : \Omega \cup \{\perp\} = \perp$ — вес наилучшего известного узлу граничного ребра
- ▶ $ctest_p : Neigh_p^\perp = \perp, cbest_p : Neigh_p^\perp = \perp$ — вероятные направления к минимальному граничному ребру
- ▶ $cN_p : \mathbb{N}_0 = 0$ — счётчик исследованных рёбер

GHS: виды сообщений

- ▶ (**connect**, *rank*) — отправляется в минимальное граничное ребро для обозначения готовности фрагмента присоединиться
- ▶ (**initiate**, *rank*, *name*, *state*) — принимается по минимальному граничному ребру для присоединения и пересылается узлам фрагмента
- ▶ (**test**, *rank*, *name*) — отправляется в инцидентное ребро типа \perp наименьшего веса в рамках поиска минимального граничного ребра
- ▶ **reject** — отправляется в ответ на **test** во внутреннее ребро
- ▶ **accept** — отправляется в ответ на **test** в граничное ребро
- ▶ (**report**, *w_{best}*) — отправляется по направлению к стержню с наименьшим обнаруженным весом граничного ребра
- ▶ **changeroot** — принимается от соседа, расположенного ближе к стержню (родителя)

GHS: инициализация узла p

Первое однократно выполняющееся действие каждого узла p :

1. $q = \underset{q \in Neigh_p}{\text{Argmin}} \omega_p[q]$
 2. $cfrag_p[q] := \mathbb{t}$;
 3. $\text{send}_q(\mathbf{connect}, 0)$
-

Узел в тривиальном фрагменте ранга 0 очевидным образом находит минимальное граничное ребро и объявляет о готовности присоединиться по этому ребру

После этого каждый узел p в бесконечном цикле

- ▶ ожидает выполнения хотя бы одного из предусловий, описанных далее,
- ▶ произвольно выбирает одно из выполненных предусловий и
- ▶ выполняет процедуру, отвечающую выбранному предусловию

GHS: приём connect узлом p

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение (**connect**, $rank$), где (а) $rank \leq rank_p$ и (б) если $rank = rank_p$, то $cfrag_p[q] \neq \perp$ (т.е. можно применить правило (1) или (2) объединения фрагментов)

1. receive $_q$ (**connect**, $rank$) для сообщения и q из условия
 2. Если $rank < rank_p$ (правило 1):
 - 2.1 $cfrag_p[q] := \mathbb{T}$;
 - 2.2 send $_q$ (**initiate**, $rank_p$, $name_p$, $state_p$)
 3. Если $rank = rank_p$ (правило 2):
send $_q$ (**initiate**, $rank_p + 1$, $\omega_p[q]$, $search$)
-

Узлу q отправляется приказ присоединиться, если он

- ▶ младший или
- ▶ ровесник и при этом узел p уверен, что (p, q) — минимальное граничное ребро для его текущего фрагмента

Вопрос. Что происходит с сообщением типа **connect** в вычислении в целом, если сейчас для него условие не выполнено?

GHS: приём **initiate** узлом p

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **initiate**

1. $\text{receive}_q(\textbf{initiate}, rank, name, state)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p, parent_p) := (rank, name, state, q);$
3. $(\omega best_p, cbest_p) := (\infty, \perp);$
4. Для всех $r \in Neigh_p \setminus \{q\}$, таких что $cfrag_p[r] = \mathbb{t}$:
 $\text{send}_r(\textbf{initiate}, rank, name, state)$
5. Если $state_p = search$:
 - 5.1 $cN_p := 0;$
 - 5.2 $TEST_p$

После получения приказа о присоединении узел

- обновляет информацию о фрагменте (ранг, имя, статус поиска минимального граничного ребра, родитель),

GHS: приём **initiate** узлом p

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **initiate**

1. $\text{receive}_q(\textbf{initiate}, rank, name, state)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p, parent_p) := (rank, name, state, q);$
3. $(\omega best_p, cbest_p) := (\infty, \perp);$
4. Для всех $r \in Neigh_p \setminus \{q\}$, таких что $cfrag_p[r] = \mathbb{t}$:
 $\text{send}_r(\textbf{initiate}, rank, name, state)$
5. Если $state_p = search$:
 - 5.1 $cN_p := 0;$
 - 5.2 $TEST_p$

После получения приказа о присоединении узел

- «сбрасывает» информацию о наилучшем известном граничном ребре,

GHS: приём **initiate** узлом p

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **initiate**

1. $\text{receive}_q(\textbf{initiate}, rank, name, state)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p, parent_p) := (rank, name, state, q);$
3. $(\omega best_p, cbest_p) := (\infty, \perp);$
4. Для всех $r \in Neigh_p \setminus \{q\}$, таких что $cfrag_p[r] = \text{\texttt{t}}$:
 $\text{send}_r(\textbf{initiate}, rank, name, state)$
5. Если $state_p = search$:
 - 5.1 $cN_p := 0;$
 - 5.2 $TEST_p$

После получения приказа о присоединении узел

- ▶ пересылает остальным соседям в «старом» фрагменте приказ о присоединении и

GHS: приём **initiate** узлом p

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **initiate**

1. $\text{receive}_q(\textbf{initiate}, rank, name, state)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p, parent_p) := (rank, name, state, q);$
3. $(\omega best_p, cbest_p) := (\infty, \perp);$
4. Для всех $r \in Neigh_p \setminus \{q\}$, таких что $cfrag_p[r] = \text{\texttt{t}}$:
 $\text{send}_r(\textbf{initiate}, rank, name, state)$
5. Если $state_p = search$:
 - 5.1 $cN_p := 0;$
 - 5.2 $TEST_p$

После получения приказа о присоединении узел

- ▶ если в приказе говорится продолжить поиск минимального граничного ребра, то присоединяется к поиску при помощи (описанной далее) процедуры $TEST_p$

GHS: приём **initiate** узлом p

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **initiate**

1. $\text{receive}_q(\text{initiate}, rank, name, state)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p, parent_p) := (rank, name, state, q);$
3. $(wbest_p, cbest_p) := (\infty, \perp);$
4. Для всех $r \in Neigh_p \setminus \{q\}$, таких что $cfrag_p[r] = \perp$:
 $\text{send}_r(\text{initiate}, rank, name, state)$
5. Если $state_p = search$:
 - 5.1 $cN_p := 0;$
 - 5.2 $TEST_p$

Вопрос.

Зачем узел сбрасывает информацию о наилучшем граничном ребре?
Останется ли алгоритм корректным, если этого не делать?

GHS: приём *initiate* узлом p

Процедура $TEST_p$:

1. Если $\exists q \in Neigh_p : cfrag_p[q] = \perp$, то:
 - 1.1 Выбрать указанный выше q с наименьшим значением $\omega_p[q]$
 - 1.2 $c_{test}_p := q$;
 - 1.3 $send_q(\mathbf{test}, rank_p, name_p)$
2. Иначе:
 - 2.1 $c_{test}_p := \perp$;
 - 2.2 $REPORT_p$

Узел p в рамках поиска минимального граничного ребра

- ▶ выбирает инцидентное ребро типа \perp (неопробованное) с наименьшим весом и отправляет в него сообщение **test** для проверки того, является ли оно граничным,
- ▶ а если таких рёбер нет, то считает поиск завершённым и докладывает о результатах в сторону стержня

GHS: приём *initiate* узлом p

Процедура $REPORT_p$:

1. Если $cN_p = |\{q \mid q \in Neigh_p \setminus \{parent_p\}, cfrag_p = \mathfrak{t}\}|$ и $c_{test}_p = \perp$:
 - 1.1 $state_p := found$;
 - 1.2 $send_{parent_p}(\mathbf{report}, \omega_{best}_p)$
-

Доклад о результатах поиска наилучшего граничного ребра устроен так

Если узел получил от всех детей мнения о наилучших граничных рёбрах и завершил свой локальный поиск наилучшего граничного ребра, то он отправляет вес наилучшего известного ему граничного ребра родителю (в сторону стержня)

GHS: приём test узлом p

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение (**test**, $rank$, $name$), где $rank \leq rank_p$

1. receive $_q$ (**test**, $rank$, $name$) для сообщения и q из предусловия
2. Если $name \neq name_p$ (это граничное ребро): send $_q$ (**accept**)
3. Иначе (это внутреннее ребро):
 - 3.1 Если $cfrag_p[q] = \perp$: $cfrag_p[q] := \mathbb{f}$;
 - 3.2 Если $q \neq ctest_p$: send $_q$ (**reject**)
Иначе: $TEST_p$

Если p получил от узла q нестаршего фрагмента сообщение о проверке граничности ребра, то:

- ▶ Если фрагменты p и q разные, то p отвечает, что ребро граничное
- ▶ Иначе p меняет тип ребра на «внутреннее» и в зависимости от того, проверяет ли сейчас это ребро, либо продолжает перебирать инцидентные рёбра (запускает $TEST_p$), либо сообщает q о том, что ребро внутреннее

GHS: приём test узлом p

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение (**test**, $rank$, $name$), где $rank \leq rank_p$

1. receive $_q$ (**test**, $rank$, $name$) для сообщения и q из предусловия
 2. Если $name \neq name_p$ (это граничное ребро): send $_q$ (**accept**)
 3. Иначе (это внутреннее ребро):
 - 3.1 Если $cfrag_p[q] = \perp$: $cfrag_p[q] := \mathbb{f}$;
 - 3.2 Если $q \neq ctest_p$: send $_q$ (**reject**)
Иначе: $TEST_p$
-

Вопрос. Почему блокируется приём сообщения **test** от старшего фрагмента, и что происходит с этим сообщением в вычислении в целом?

Вопрос. Почему в (3.2) считается правильным иногда не отправлять ожидаемый ответ **reject** («ребро не граничное») и вместо этого выполнять $TEST_p$?

GHS: приём accept узлом p

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение **accept**

1. $\text{receive}_q(\mathbf{accept})$ для произвольного $q \in \text{Neigh}_p$
 2. $\text{ctest}_p := \perp$;
 3. Если $\omega_p[q] < \omega_{best_p}$:
 - 3.1 $\omega_{best_p} := \omega_p[q]$;
 - 3.2 $\text{cbest}_p := q$;
 4. REPORT_p
-

Если на сообщение **test**, отправленное в TEST_p , получен ответ, что проверяемое ребро — граничное, то p признаёт это ребро наилучшим инцидентным, завершает поиск и докладывает родителю

Вопрос. Зачем «сбрасывается» значение ctest_p ?

Останется ли алгоритм корректным, если удалить этот «сброс»?

GHS: приём **reject** узлом p

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение **reject**

1. receive $_q$ (**reject**) для произвольного $q \in Neigh_p$
 2. Если $cfrag_p[q] = \perp$: $cfrag_p[q] := \mathbb{f}$;
 3. $TEST_p$
-

Если на сообщение **test** получен ответ, что проверяемое ребро является внутренним, то тип ребра соответственно обновляется и поиск наилучшего инцидентного граничного ребра продолжается

GHS: приём report узлом p

Предусловие: $state_p = found$ и в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **report**

1. receive $_q(\mathbf{report}, \omega)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
 2. Если $q \neq parent_p$:
 - 2.1 Если $\omega < \omega_{best_p}$: $(\omega_{best_p}, c_{best_p}) := (\omega, q)$;
 - 2.2 $cN_p := cN_p + 1$;
 - 2.3 $REPORT_p$
 3. Иначе:
 - 3.1 Если $\omega > \omega_{best_p}$: $CHANGEROOT_p$
 - 3.2 Иначе: если $\omega = \omega_{best_p} = \infty$, то завершить выполнение узла
-

Если доклад получен от ребёнка, то p обновляет мнение о наилучшем граничном ребре и докладывает родителю

GHS: приём report узлом p

Предусловие: $state_p = found$ и в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **report**

1. receive $_q(\mathbf{report}, \omega)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
2. Если $q \neq parent_p$:
 - 2.1 Если $\omega < \omega_{best_p}$: $(\omega_{best_p}, c_{best_p}) := (\omega, q)$;
 - 2.2 $cN_p := cN_p + 1$;
 - 2.3 $REPORT_p$
3. Иначе:
 - 3.1 Если $\omega > \omega_{best_p}$: $CHANGEROOT_p$
 - 3.2 Иначе: если $\omega = \omega_{best_p} = \infty$, то завершить выполнение узла

Если же доклад получен от родителя, то это доклад от одного стержневого узла другому (они и только они являются взаимными родителями), и стержневой узел, нашедший ребро лучшего веса, запускает процедуру $CHANGEROOT_p$ отправки сообщения **connect** в ребро с этим весом

GHS: приём report узлом p

Предусловие: $state_p = found$ и в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **report**

1. receive $_q(\mathbf{report}, \omega)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
 2. Если $q \neq parent_p$:
 - 2.1 Если $\omega < \omega_{best_p}$: $(\omega_{best_p}, c_{best_p}) := (\omega, q)$;
 - 2.2 $cN_p := cN_p + 1$;
 - 2.3 $REPORT_p$
 3. Иначе:
 - 3.1 Если $\omega > \omega_{best_p}$: $CHANGEROOT_p$
 - 3.2 Иначе: если $\omega = \omega_{best_p} = \infty$, то завершить выполнение узла
-

Если оба стержневых узла не нашли ни одного граничного ребра, то процедура построения MST в узле завершается

GHS: приём report узлом p

Предусловие: $state_p = found$ и в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение типа **report**

1. receive $_q(\mathbf{report}, \omega)$ для произвольного $q \in Neigh_p$
 2. Если $q \neq parent_p$:
 - 2.1 Если $\omega < \omega_{best_p}$: $(\omega_{best_p}, c_{best_p}) := (\omega, q)$;
 - 2.2 $cN_p := cN_p + 1$;
 - 2.3 $REPORT_p$
 3. Иначе:
 - 3.1 Если $\omega > \omega_{best_p}$: $CHANGEROOT_p$
 - 3.2 Иначе: если $\omega = \omega_{best_p} = \infty$, то завершить выполнение узла
-

Вопрос. Почему сообщение типа **report**

может быть получено только от узла текущего фрагмента?

GHS: приём report узлом p

Процедура $CHANGEROOT_p$:

1. Если $cfrag_p[cbest_p] = \perp$: $send_{cbest_p}(\mathbf{changeroot})$
 2. Иначе:
 - 2.1 $send_{cbest_p}(\mathbf{connect}, rank_p)$
 - 2.2 $cfrag_p[cbest_p] := \perp$;
-

Сообщение **changeroot** передаётся внутри фрагмента в сторону узла, которому инцидентно найденное минимальное граничное ребро

В это ребро отправляется сообщение **connect** о намерении объединиться с фрагментом на другом конце ребра

GHS: приём changeroot в узле p

Предусловие:

в канале хотя бы от одного соседа q есть сообщение **changeroot**

1. $\text{receive}_q(\mathbf{changeroot})$ для произвольного $q \in \text{Neigh}_p$
 2. CHANGEROOT_p
-

Д.з. 2. Ответьте хотя бы на три поставленных ранее вопроса

GHS: свойства

Теорема. Любое вычисление GHS конечно, и в заключительной конфигурации условие $cfrag_p[q] = \mathbb{t}$ верно тогда и только тогда, когда ребро $p - q$ входит в MST

Доказательство (основная идея).

Из описания и подробных пояснений должно быть ясно, что сообщение **connect** отправляется только в минимальное граничное ребро фрагмента

По **утверждению 2**, если показать, что каждый фрагмент, имеющий хотя бы одно граничное ребро, отправляет сообщение **connect**, то алгоритмом действительно за конечное число действий строится MST в том смысле, как написано в условии теоремы

GHS: свойства

Доказательство (основная идея).

Предположим от противного, что в вычислении возникает фрагмент, отличный от MST, ни один узел которого никогда не отправляет **connect**

Согласно описанию алгоритма, это означает, что в каждом фрагменте на очередном этапе выполнения действий этого фрагмента происходит **блокировка**: бесконечное безрезультатное ожидание того, что предусловие очередного действия станет истинным

Согласно схеме пересылки сообщений внутри фрагмента и между фрагментами, блокировка фрагмента F_1 (с рангом $rank_1$ и именем $name_1$) возможна только в тех случаях, когда сообщение из F_1 отправляется узлу другого фрагмента F_2 (с рангом $rank_2$ и именем $name_2$) и никогда не принимается в F_2 из-за невыполненного предусловия, и это возможно только для двух сообщений:

1. (**connect**, $rank_1$)
2. (**test**, $rank_1$, $name_1$)

GHS: свойства

Доказательство (основная идея).

Для каждого из этих видов сообщений невозможность принять его в F_2 означает, что верно одно из следующих условий:

1. $rank_1 > rank_2$
2. $rank_1 = rank_2$ и $\omega_{e_{F_1}} > \omega_{e_{F_2}}$
3. $rank_1 = rank_2$, $\omega_{e_{F_1}} = \omega_{e_{F_2}}$, и в F_2 выполняется поиск минимального граничного ребра

Д.з. 3. Показать, что в GHS недостижимы конфигурации, в которых для каждого фрагмента выполнено хотя бы одного из трёх условий выше

Это означает, что если существует текущий фрагмент, отличный от MST, то существует и незаблокированный фрагмент (*противоречие*) ▼

Д.з. 4. Оценить, сколько сообщений каждого типа отправляется при выполнении алгоритма, и на основании этой оценки показать, что коммуникационная сложность GHS не превосходит $2|V| \log_2 |V| + 5|E|$