Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 31

Натуральное исчисление предикатов:
основные определения,
корректность

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Вступление

Теорема. Если все мурыки бюкают, а я не бюкаю, то я не мурыка.

Доказательство.
Пусть известно, что все мурыки бюкают и я не бюкаю.
Предположим, что я мурыка.
Раз все мурыки бюкают, то и я бюкаю.
Но известно, что я не бюкаю.
Получено противоречие, из которого следует, что я не мурыка. ▼

В этих суждениях существенную роль играют предметы, их свойства и специальные способы рассуждения о предметах

Для записи таких суждений недостаточно языка логики высказываний, но хорошо подходит язык логики предикатов

Попробуем преобразовать и расширить НИВ до натурального исчисления предикатов (НИП), заменив язык ЛВ языком ЛП и добавив подходящие правила вывода для кванторов

Вступление

Теорема. Если все мурыки бюкают, а я не бюкаю, то я не мурыка.

Доказательство.
Пусть известно, что все мурыки бюкают и я не бюкаю.
Предположим, что я мурыка.
Раз все мурыки бюкают, то и я бюкаю.
Но известно, что я не бюкаю.
Получено противоречие, из которого следует, что я не мурыка. ▼

Пусть $\mathrm{M}(\mathtt{x}) =$ "$\mathtt{x}$ — мурыка", и $\text{Б}(\mathtt{x}) =$ "$\mathtt{x}$ бюкает"

Тогда теорема и доказательство переписываются так:

Теорема. $\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{M}(\mathtt{x}) \to \text{Б}(\mathtt{x}))\ \&\ \neg\text{Б}(\textbf{я}) \to \neg\mathrm{M}(\textbf{я})$.

Доказательство.
Пусть известно «$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{M}(\mathtt{x}) \to \text{Б}(\mathtt{x}))\ \&\ \neg\text{Б}(\textbf{я})$».
Предположим, что «$\mathrm{M}(\textbf{я})$».
Раз «$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{M}(\mathtt{x}) \to \text{Б}(\mathtt{x}))$», то и «$\text{Б}(\textbf{я})$».
Но известно, что «$\neg\text{Б}(\textbf{я})$».
Получено противоречие, из которого следует, что «$\neg\mathrm{M}(\textbf{я})$». ▼

НИП: формулы исчисления (секвенции)

Теорема. $\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{М}(\mathrm{x}) \to \mathrm{Б}(\mathrm{x}))\,\&\,\neg\mathrm{Б}(\textbf{я}) \to \neg\mathrm{М}(\textbf{я})$.

Доказательство.
Пусть известно «$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{М}(\mathrm{x}) \to \mathrm{Б}(\mathrm{x}))\,\&\,\neg\mathrm{Б}(\textbf{я})$».
Предположим, что «$\mathrm{М}(\textbf{я})$».
Раз «$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{М}(\mathrm{x}) \to \mathrm{Б}(\mathrm{x}))$», то и «$\mathrm{Б}(\textbf{я})$».
Но известно, что «$\neg\mathrm{Б}(\textbf{я})$».
Получено противоречие, из которого следует, что «$\neg\mathrm{М}(\textbf{я})$». ▼

Словом «формула» теперь будем обозначать формулы логики предикатов

Понятие секвенции (формулы исчисления) оставим без изменений: это запись $\Gamma \vdash A$, где A — формула и Γ — множество формул

Тогда доказательство выше можно записать как последовательность секвенций аналогично тому, как это делалось в примере для НИВ (*но не будем это делать, т.к. окажется, что эта последовательность построена не совсем «по правилам»*)

Например, строке 5 доказательства выше соответствует секвенция

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{М}(\mathrm{x}) \to \mathrm{Б}(\mathrm{x}))\,\&\,\neg\mathrm{Б}(\textbf{я}), \mathrm{М}(\textbf{я}) \vdash \neg\mathrm{Б}(\textbf{я})$$

НИП: аксиомы и правила вывода

Множество аксиом оставим без изменений:
это все секвенции, порождаемые схемой $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$

Включим в НИП 14 правил вывода:

- Все 10 правил НИВ
  (*с формулами логики предикатов вместо логики высказываний*)
- 4 новых правила для введения и удаления кванторов

В новых правилах будут использоваться следующие параметры:

- A, B — формулы
- Γ — множество формул
- $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ — предметные переменные
- t — терм

Для каждого правила также будут описаны **ограничения**,
связывающие между собой допустимые значения разных параметров

НИП: правила вывода

Правило удаления всеобщности (правило перехода к частному):

$$R_{\forall}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \forall \mathtt{x}\ A}{\Gamma \vdash A\{\mathtt{x}/t\}}$$

Ограничение: подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ правильна для A

Содержательная трактовка:
Если A верно для любого предмета,
то, в частности, A верно и для предмета, отвечающего терму t

Напоминание о правильности подстановок:

- Подстановка правильна $\Leftrightarrow$ все вхождения всех переменных подставляемых термов t оказываются свободными в A
- О том, чем «плохо» применение неправильных подстановок, говорилось в блоке 10 («существует тот, кто сам себе дед»); по тем же причинам запрещено выбирать неправильные подстановки и в этом правиле

НИП: правила вывода

Правило введения существования:

$$R_{\exists}^{+}: \frac{\Gamma \vdash A\{\mathtt{x}/t\}}{\Gamma \vdash \exists \mathtt{x}\ A}$$

Ограничение: подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ правильна для A

Содержательная трактовка:
Если A верно для предмета, отвечающего терму t,
то существует предмет, для которого верно A

Ограничение правильности подстановки
вытекает из тех же соображений, что и для правила $R_{\forall}^{-}$

НИП: правила вывода

Правило введения всеобщности (правило обобщения):

$$R_{\forall}^{+}: \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall \mathtt{x}\, A}$$

Ограничение: $\mathtt{x}$ не является свободной переменной формул из Γ

Содержательная трактовка:

- Рассмотрим произвольный предмет $\mathtt{x}$
- Известно, что *для этого произвольного предмета* $\mathtt{x}$ верно A
- Следовательно, A верно для любого предмета $\mathtt{x}$

«Произвольность» предмета $\mathtt{x}$ отражена в **ограничении**:

- Если в Γ содержится формула φ со свободной переменной $\mathtt{x}$, то, согласно содержательной трактовке секвенции $\Gamma \vdash A$, среди текущих используемых предположений есть такое: «предмет $\mathtt{x}$ обладает свойством φ», а значит, $\mathtt{x}$ не произволен
- Иначе нет ни одного текущего предположения, ограничивающего свободу выбора $\mathtt{x}$

НИП: правила вывода

Правило удаления существования

$$R_{\exists}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \exists \mathtt{x}\ A,\ \Gamma \cup \{A\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Ограничения:

- Подстановка $\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\}$ правильна для A
- $\mathtt{y}$ не является свободной переменной формул из $\Gamma \cup \{\exists \mathtt{x}\ A,\ B\}$

Это правило вывода — самое сложное для понимания в НИП,
но при этом повсеместно используется в доказательствах:

- Известно, что существует предмет, для которого верно A
- Обозначим этот существующий предмет символом $\mathtt{y}$
- Получив возможность указывать на предмет $\mathtt{y}$,
  покажем, что верно утверждение B,
  не зависящее от того, какое именно имя $\mathtt{y}$ было выбрано
- Тогда B действительно верно

НИП: правила вывода

Правило удаления существования

$$R_{\exists}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \exists \mathtt{x}\ A,\ \Gamma \cup \{A\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Ограничения:

- Подстановка $\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\}$ правильна для A
- $\mathtt{y}$ не является свободной переменной формул из $\Gamma \cup \{\exists \mathtt{x}\ A,\ B\}$

Ограничения вытекают из следующих соображений:

- Всё, что известно про $\mathtt{y}$ — это то, что для него верно A, а в остальном $\mathtt{y}$ произволен
  - поэтому переменная $\mathtt{y}$ не свободна в $\Gamma \cup \{\exists \mathtt{x}\ A\}$
- Если в B содержится свободная переменная $\mathtt{y}$, то от предположения «для этого $\mathtt{y}$ верно A» избавиться нельзя, а если не содержится, то можно
  - поэтому переменная $\mathtt{y}$ не свободна в B

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

Правильный вывод:

1. Посмотрим внимательно на второе утверждение:
$$\mathfrak{A}\colon\ \varphi_1, \varphi_2 \vdash \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$
2. Обозначим этого прилежного студента переменной «**Вася**», и посмотрим внимательно на факт его прилежности:
$$\mathfrak{A}\colon\ \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася})$$
3. Раз все прилежные студенты сдадут этот курс, то и условленный **Вася** сдаст, если он прилежен:
$$R_{\forall}^{-}\colon\ \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \to \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R_{\to}^{-}\colon\ \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

Правильный вывод:

5. Раз условленный **Вася** сдаст этот курс,
   то хотя бы один студент сдаст этот курс:
$$R_{\exists}^{+}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Pass}(\mathtt{x})$$

6. Итог: хотя бы один студент сдаст этот курс:
$$R_{\exists}^{-}\colon \varphi_1, \varphi_2 \vdash \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Pass}(\mathtt{x})$$

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

***Н**еправильный вывод:* ...

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\to}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
5. Итог: студент с именем «**Вася**» сдаст этот курс:
$$\cancel{R^{-}_{\exists}}\colon \varphi_1, \varphi_2 \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

Правило $R^{-}_{\exists}$ применено ошибочно:
в правой части секвенции 4 содержится свободная переменная «**Вася**»

Содержательно, на самом деле **Васи** не существует:
это условность, про которую в исходных данных ничего не сказано,
и он никак не связан с реальными Васями

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

***Н**еправильный вывод:* ...

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R^-_{\to}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
5. Так как «**Вася**» — переменная,
на его место можно поставить любого студента:
$$\cancel{R^+_{\forall}}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \forall \textbf{Вася}\ \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
6. Значит, кто угодно сдаст этот курс:
$$R^-_{\exists}\colon \varphi_1, \varphi_2 \vdash \forall \textbf{Вася}\ \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

Правило $R^+_{\forall}$ применено ошибочно:
в левой части секвенции 4 содержится свободная переменная **Вася**
Содержательно, **Вася** — произвольный прилежный студент,
а неприлежные не справятся с ролью **Васи**

НИП: корректность

Теорема (о корректности НИП)
Любая формула, доказуемая в НИП, общезначима

Общая схема доказательства остаётся точно такой же,
как и для теоремы о корректности НИВ

Для правил, содержащихся в НИВ,
доказательство переносится *почти* дословно
(*с поправкой на наличие свободных переменных в формулах*)

А для четырёх новых правил
можете попробовать предложить обоснование самостоятельно