

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 31

Гильбертовское исчисление предикатов

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление

$$\begin{array}{l} R_{\&}^+: \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \quad R_{\&}^{-1}: \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \quad R_{\&}^{-2}: \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B} \\ R_{\vee}^{+1}: \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad R_{\vee}^{+2}: \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \\ R_{\vee}^{-}: \frac{\Gamma \vdash A \vee B, \Gamma \cup \{A\} \vdash C, \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C} \\ R_{\rightarrow}^+: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad R_{\rightarrow}^{-}: \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \\ R_{\neg}^+: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \quad R_{\neg}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A} \\ R_{\forall}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A\{x/t\}} \quad R_{\forall}^+: \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \\ R_{\exists}^+: \frac{\Gamma \vdash A\{x/t\}}{\Gamma \vdash \exists x A} \quad R_{\exists}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \exists x A, \Gamma \cup \{A\{x/y\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B} \end{array}$$

А достаточно ли этих правил и аксиом для построения доказательств для всевозможных секвенций $\vdash \varphi$ с общезначимыми формулами φ ?

Вступление

В *теореме о полноте натурального исчисления высказываний* существенно использовался тот факт, что для любой формулы можно *обоснованно* построить **конечную** таблицу значений, перебрав **конечное** множество всех интерпретаций

Для формул логики предикатов такой “трюк” применить невозможно

Обоснование полноты исчислений предикатов — трудоёмкая задача, и существенная часть обоснования в лекциях будет опущена

Попробуем обосновать полноту НИП так:

- ▶ Рассмотрим более “удобное” полное исчисление предикатов
- ▶ Покажем, что любое доказательство общезначимости формулы в рассмотренном исчислении можно перестроить в доказательство общезначимости той же формулы в НИП

Вступление

Устроим новое исчисление так:

- ▶ Формулами исчисления объявим “обычные” логические формулы
- ▶ Включим в исчисление как можно меньше правил как можно более простого вида
- ▶ Включим в исчисление как можно меньше аксиом как можно более простого вида, но так, чтобы из-за слишком малого числа аксиом не возросло общее число правил

Исчисление, устроенное так, принято называть

исчислением гильбертовского типа,

или, более коротко,

гильбертовским исчислением

Далее рассматривается гильбертовское исчисление предикатов (**ГИП**)

ГИП: правила вывода

Включим в ГИП два правила:

1. *Правило отделения* (modus ponens):

$$R_{mp}: \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

2. *Правило обобщения*:

$$R_g: \frac{A}{\forall x A}$$

Это упрощённые варианты одноимённых правил НИП, соответствующие секвенциям с пустой левой частью (не содержащим ни одного предположения)

ГИП: аксиомы

Включим в ГИП 13 схем аксиом:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \& B \rightarrow A$
4. $A \& B \rightarrow B$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$
6. $A \rightarrow A \vee B$
7. $B \rightarrow A \vee B$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
9. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
10. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
11. $A \vee \neg A$
12. $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$
13. $A\{x/t\} \rightarrow \exists x A$

Здесь используются параметры A, B, C (формулы), x (переменная) и t (терм, такой что подстановка $\{x/t\}$ правильна для A)

ГИП: аксиомы

Пояснение схем аксиом:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Если A верно, то оно следует из чего угодно

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Если в предположении о верности A из B следует C ,
и если, кроме того, из A следует B , то из A следует C (введение \rightarrow)

$$A \& B \rightarrow A \qquad A \& B \rightarrow B$$

Из $A \& B$ следует и A , и B (удаление $\&$)

$$A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$$

Если верно A и верно B , то верно $A \& B$ (введение $\&$)

$$A \rightarrow A \vee B \qquad B \rightarrow A \vee B$$

Если верно A или верно B , то верно $A \vee B$ (введение \vee)

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

Если из A следует C и из B следует C ,
то из $A \vee B$ также следует C (разбор случаев)

ГИП: аксиомы

Пояснение схем аксиом:

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

Если A неверно, то из него следует что угодно (приведение к абсурду)

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$$

Если из A следует и B , и $\neg B$, то A неверно (рассуждение от противного)

$$A \vee \neg A$$

Справедлив закон исключённого третьего

$$\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$$

Если A верно для всех предметов x ,
то A верно и для предмета, отвечающего терму t (переход к частному)

$$A\{x/t\} \rightarrow \exists x A$$

Если A верно для предмета, отвечающего терму t ,
то существует предмет, для которого верно A (введение \exists)

ГИП: аксиомы

Пример, показывающий, как нетривиально устроены доказательства в ГИП

Докажем ГИП общезначимость формулы $A \rightarrow A$:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}_2: \\ \mathfrak{A}_1: \\ R_{mp}: \\ \mathfrak{A}_1: \\ R_{mp}: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) \\ A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \\ (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \\ A \rightarrow (A \rightarrow A) \\ A \rightarrow A \end{array} \right.$$

Как вообще до такого додуматься?!

ГИП: аксиомы

Придумывать доказательства в ГИП намного сложнее, чем в НИП, но из-за простоты правил вывода обосновать полноту ГИП оказывается намного проще

Теорема (Гёделя о полноте)

Формула логики предикатов доказуема в ГИП в том и только том случае, если она общезначима

Доказательство. Попробуйте самостоятельно

Внимание! Эта задача заметно труднее всех предыдущих, и оценивается соответственно

В обосновании полноты НИП будем использовать теорему Гёделя о полноте без доказательства для иллюстрации того, как полнота одних исчислений может использоваться для обоснования полноты других исчислений