Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

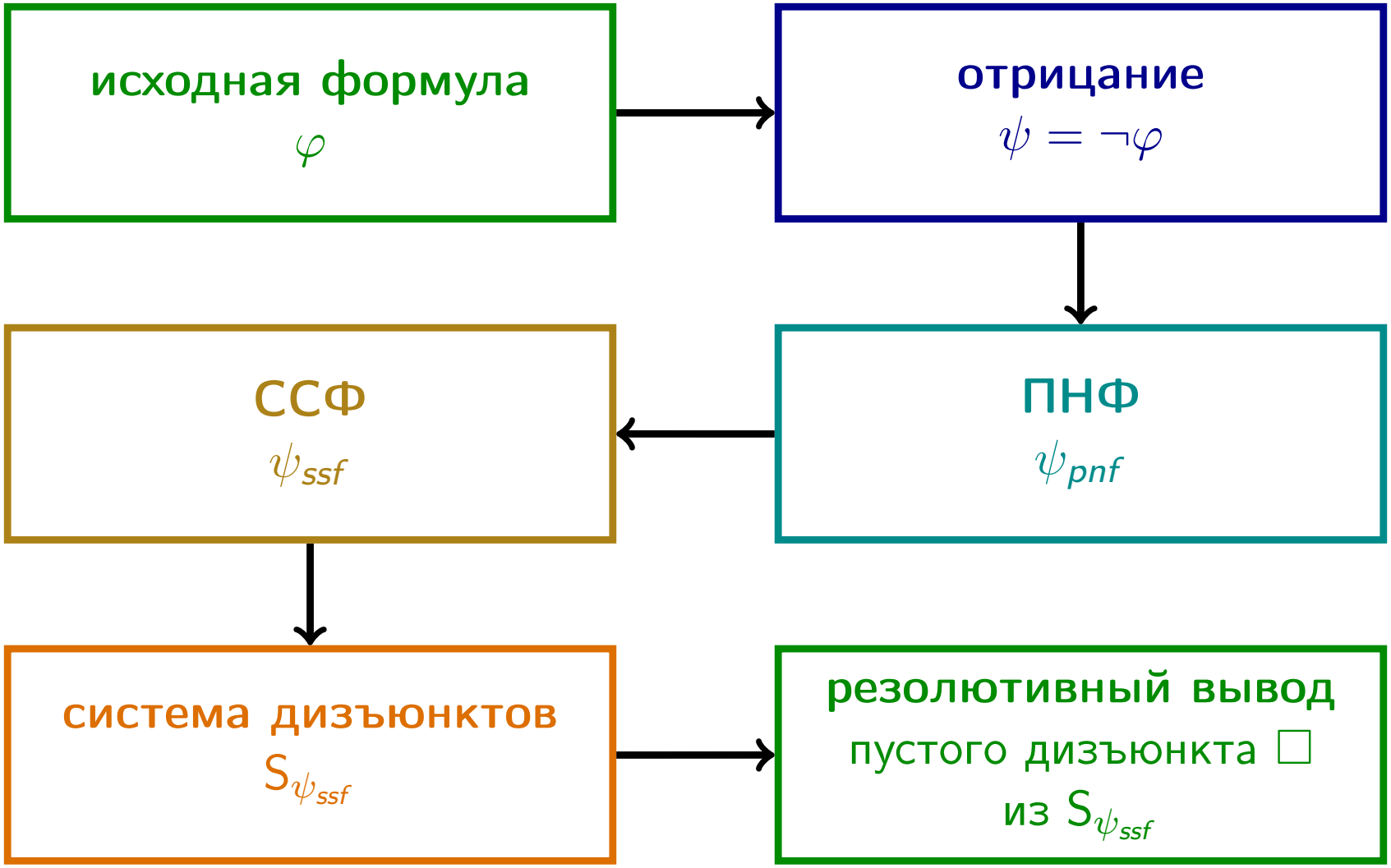
Блок 17

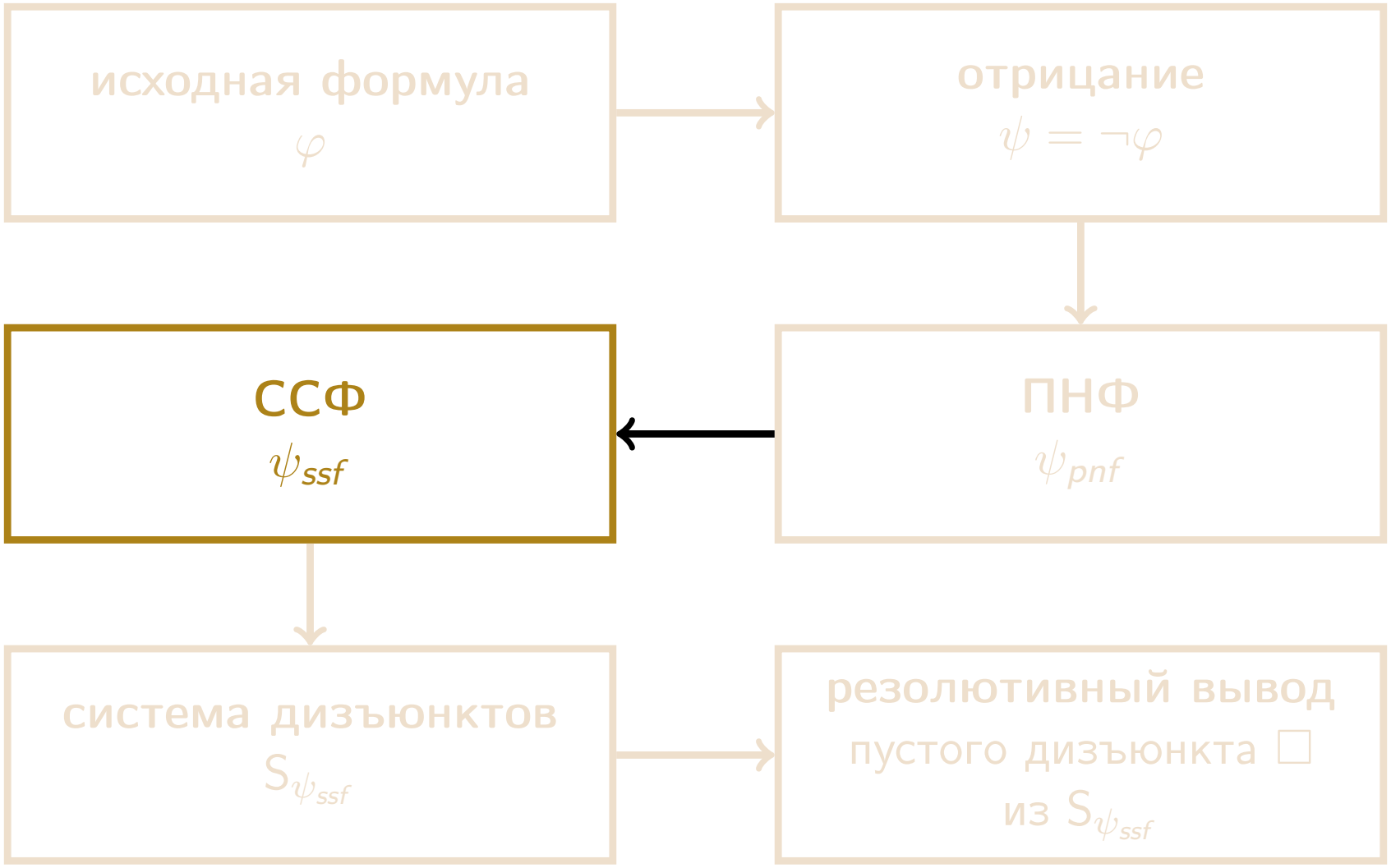
Сколемовская стандартная форма (ССФ)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр


исходная формула
φ
отрицание
$\psi = \neg\varphi$
ПНФ
ψ_{pnf}
ССФ
ψ_{ssf}
система дизъюнктов
$S_{\psi_{ssf}}$
резолютивный вывод
пустого дизъюнкта $\square$
из $S_{\psi_{ssf}}$


исходная формула
φ
отрицание
$\psi = \neg\varphi$
ССФ
ψ_{ssf}
ПНФ
ψ_{pnf}
система дизъюнктов
$S_{\psi_{ssf}}$
резолютивный вывод
пустого дизъюнкта $\square$
из $S_{\psi_{ssf}}$

Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула находится в сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- она находится в предварённой нормальной форме и
- её кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$:

$$\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}} \, (\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathsf{D}_k)$$

Например, формула

$$\forall \mathtt{x} \, \forall \mathtt{u} \, (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \,\&\, (\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x})) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathbf{g}(\mathtt{x}))) \,\&\, \neg \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u}))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с "находится в ССФ" будем говорить "является ССФ"

На одном из этапов метода резолюций следует преобразовать ПНФ в настолько же (не)выполнимую ССФ

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\,\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство.

($\Leftarrow$):
Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{I}$ для формулы $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\,\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$

По семантике "$\forall$", для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно

$$\mathcal{I} \models \chi\,\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}\,[\widetilde{d}^n]$$

Следовательно, верно и $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, \bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n)]$

По семантике "$\exists$", верно $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi)[\widetilde{d}^n]$

По семантике "$\forall$", так как набор предметов $\widetilde{d}^n$ произволен, верно и $\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi$

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство.

($\Rightarrow$): Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{I}$ для формулы φ

По семантике "$\forall$" и "$\exists$", для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ существует предмет d_{n+1}, такой что $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

По $\mathcal{I}$ построим **новую** интерпретацию $\mathcal{J}$:

- если в сигнатуре был функциональный символ f, удалим его
- добавим в сигнатуру функциональный символ $\mathsf{f}^{(n)}$
- оценим f так, чтобы выполнялось равенство $\bar{\mathsf{f}}(\widetilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi[\widetilde{d}^n, \bar{\mathsf{f}}(\widetilde{d}^n)]$
Следовательно $\mathcal{J} \models \chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}\, [\widetilde{d}^n]$
По семантике "$\forall$", так как набор предметов $\widetilde{d}^n$ произволен, верно и $\mathcal{J} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$ ▼

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\,\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Небольшая вольность: если слева от $\exists$ не стоит ни одного $\forall$, то, согласно лемме, f — 0-местный функциональный символ, то есть **константа**, и ψ подстановка в условии леммы имеет вид

$$\chi\,\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathsf{f}\}$$

Устранение квантора $\exists$ с введением новых символов с целью получить более простую "хорошую" формулу обычно называют сколемизацией (*здесь "хорошая" — сохраняющая выполнимость и невыполнимость*)

При устранении $\exists$ на место удаляемой переменной подставляются сколемовские термы (*здесь* — $\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}
Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Алгоритм. Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор $\exists$, самый левый $\exists$ удаляется при помощи подстановки сколемовского терма:

$$\varphi_{pnf} = \forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \exists \mathtt{x}_k \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \exists \mathtt{x}_m \ \ldots \ \chi$$

$$\forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \exists \mathtt{x}_m \ \ldots \ (\chi \{\mathtt{x}_k / \mathbf{f}_1(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1})\})$$

$$\forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \ldots \\ (\chi \{\mathtt{x}_k / \mathbf{f}_1(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1}), \mathtt{x}_m / \mathbf{f}_2(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1}, \mathtt{x}_{k+1}, \ldots, \mathtt{x}_{m-1})\})$$

$$\ldots$$

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

При этом **важно** (!) при удалении очередного $\exists$
каждый раз выбирать **новый** функциональный символ:
не содержащийся в формуле после всех предыдущих удалений

Алгоритм сколемизации ПНФ

Пример:

$$\exists u\ \exists v\ \forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(u,v)\ \&\ P(v,w)\ \&\ P(w,x)\ \&\ P(x,y)\ \&\ P(y,z)\ \&\ P(z,u))$$

$$\exists v\ \forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c},v)\ \&\ P(v,w)\ \&\ P(w,x)\ \&\ P(x,y)\ \&\ P(y,z)\ \&\ P(z,\mathbf{c}))$$

$$\forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c},\mathbf{d})\ \&\ P(\mathbf{d},w)\ \&\ P(w,x)\ \&\ P(x,y)\ \&\ P(y,z)\ \&\ P(z,\mathbf{c}))$$

$$\forall w\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c},\mathbf{d})\ \&\ P(\mathbf{d},w)\ \&\ P(w,\mathbf{f}(w))\ \&\ P(\mathbf{f}(w),y)\ \&\ P(y,z)\ \&\ P(z,\mathbf{c}))$$

$$\begin{aligned}\forall w\ \forall y\ (\quad & P(\mathbf{c},\mathbf{d})\ \&\ P(\mathbf{d},w)\ \&\ P(w,\mathbf{f}(w))\ \& \\ & P(\mathbf{f}(w),y)\ \&\ P(y,\mathbf{g}(w,y))\ \&\ P(\mathbf{g}(w,y),\mathbf{c})\quad)\end{aligned}$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- **c** — любая константа (ни одной не содержится в формуле)
- **d** — константа, отличная от **c**
- **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- **g** — любой функциональный символ местности 2

Алгоритм сколемизации ПНФ

Теорема(*о сколемизации*). **Если φ_{pnf} — ПНФ, то $Sk(\varphi_{pnf})$ — ССФ, для которой верно следующее:**

$$\models\!\!\!| \ \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \models\!\!\!| \ Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство.

Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ — формулы, последовательно получающиеся удалением кванторов $\exists$ (по одному) согласно алгоритму сколемизации ($\psi_1 = \varphi_{pnf}$, $\psi_k = Sk(\varphi_{pnf})$)

По *лемме об удалении квантора* $\exists$, справедливы равносильности

$$\models\!\!\!| \ \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \models\!\!\!| \ \psi_2 \quad \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad \models\!\!\!| \ Sk(\varphi_{pnf}) \ \blacktriangledown$$

А если в формулировке теоремы заменить "выполнима" ($\models\!\!\!|$) на "общезначима" ($\models$), останется ли она справедливой?