Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 14

Модальные логики
Эпистемические логики
Темпоральные логики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

Что изучает логика

В первой половине курса обсуждалась вводная часть логики:
самые известные логические языки и главные логические задачи

Отдельно обсуждалось введение в *логические исчисления*:
чем схожи и чем различаются
разные способы доказательного вывода утверждений

Но это далеко не всё, что есть в логике

Что изучает логика

- × В **аксиоматических теориях** анализируется смысл формул с a priori заданным смыслом сигнатурных символов
- × В языках **логик высшего порядка** кванторы разрешено применять к отношениям, семействам отношений, ...
- × В некоторых логиках (например, **интуиционистской**) "привычные" *логические операции* имеют совсем не такой смысл, как в логиках высказываний и предикатов
- ✓ В некоторых логиках смысл привычных логических операций остаётся прежним, но добавляются "непривычные" операции
- ✓ Для решения некоторых задач, изначально, *казалось бы*, не связанных с логикой, успешно применяются логические методы

× — это в лекциях не обсуждается

✓ — об этом речь пойдёт дальше

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима всегда близко

3: Зима бывает близко

Если отбросить всё лишнее, то для высказывания *1* справедлива одна из двух оценок:
правда, если зима действительно близко, и
неправда, если это не так

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ "зима близко", то

1: x *2:* всегда x *3:* иногда бывает x

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима всегда близко

3: Зима бывает близко

Слова, используемые как уточнение истинностной оценки высказывания, называются модальностями (*лат. modus — мера*)

"Всегда" и "иногда" — это темпоральные модальности (модальности времени) (*лат. tempus — время*)

Можно сказать, что "всегда" и "иногда" — это $\forall$ и $\exists$, но тогда:

- Какими *предметами* задаётся время, и каковы свойства этих предметов?
- Как устроить анализ смысла высказываний в интерпретациях с такими предметами?

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Я знаю, что зима близко

3: Я допускаю возможность того, что зима близко

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ "зима близко", то

1: x *2:* известно, что x *3:* допустимо x

"Известно" и "допустимо" — это эпистемические модальности (модальности знания) (*др.-греч. ἐπιστήμη — знание*)

Если "известно" и "допустимо" трактовать как $\forall$ и $\exists$,
то на какие "*предметы* знаний" указывают эти кванторы?

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима **должна быть** близко

3: Зима **имеет право быть** близко

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ “зима близко”, то

1: x *2:* должно быть x *3:* имеет право быть x

“Должен” и “имеет право” — это деонтические модальности (модальности долга) (*др.-греч.* δέον — должное)

Как связан смысл фраз “это так” и “это должно быть так”?

В *рациональных* высказываниях используется великое множество разных модальностей, и точно описать их смысл в рамках классической логики — непростая и иногда невыполнимая задача

Модальные логики: вступление

Чаще всего (*хотя и не всегда*) в высказываниях используются модальности двух двойственных видов:

Модальность необходимого	Модальность возможного
необходимо	возможно
обязательно	не исключено
всегда	иногда
должен	имеет право
знает	предполагает
доказуемо	непротиворечиво
$\Box$	$\Diamond$

Хотелось бы иметь единообразный способ определения смысла модальностей $\Box$ и $\Diamond$ — и такой способ используется в

модальных логиках

Модальные логики: синтаксис

Синтаксис формул *пропозициональных* модальных логик над множеством переменных Var:

$\varphi \ ::= \ \mathrm{x} \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\Box\varphi) \ \mid \ (\Diamond\varphi)$,
где φ — формула и $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}$

Это *синтаксис формул логики высказываний*, расширенный возможностью расстановки модальностей необходимого и возможного над любыми (под)формулами

Приоритет операций: $\neg$, $\Box$ и $\Diamond$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

Пример формулы: $\Diamond\mathrm{x} \,\&\, \Box\neg\Diamond(\mathrm{x} \vee \mathrm{y})$
“*возможно* x, *и при этом необходимо невозможно, что* x *или* y”

В этой формуле пока ещё неясно, что подразумевается под “необходимостью” и “возможностью”:
определение этих понятий — часть *семантики* формулы

Модальные логики: семантика Крипке

Описание семантики начнём с примера: **Зима *бывает* близко**

Представим себе любое строгое определение зимы и того, в каких случаях зима считается близкой

Если остановить время и задаться вопросом, близко зима или нет, то ответ на этот вопрос (**да** или **нет**) можно задать как значение пропозициональной переменной x

Время течёт, и мир меняется, как и значение x:

$$\underset{\neg x}{\text{сейчас}} \longrightarrow \underset{\neg x}{\text{через минуту}} \rightarrow \underset{\neg x}{\text{через месяц}} \rightarrow \underset{x}{\text{через полгода}}$$

Ответ на вопрос "$\Diamond x$?" в так меняющемся мире — **да**, x бывает

Изменение мира можно представить себе и по-другому: существует много взаимосвязанных миров с разными значениями x, и в семантике $\Diamond$ комбинируются значения x многих миров

Модальные логики: семантика Крипке

Модель Крипке (над переменными Var) — это система (W, R, ξ), где

- W — множество состояний (возможных миров)
- $R \subseteq W \times W$ — отношение переходов между мирами
  - "$R(w_1, w_2)$" = "$w_1 \to w_2$"
- $\xi : W \to 2^{\mathsf{Var}}$ — оценка переменных для каждого мира
  - "$\mathrm{x} \in \xi(w)$" = "переменная x истинна в мире w"

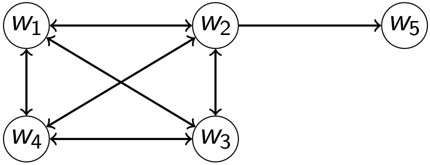
Шкала Крипке (*Kripke frame*), на которой основывается модель (W, R, ξ), — это пара (W, R)

Если $(w, w') \in R$, то w' — мир, альтернативный для w (w-альтернатива)

Модель Крипке — это *интерпретация* для формул модальной логики

Модальные логики: семантика Крипке

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



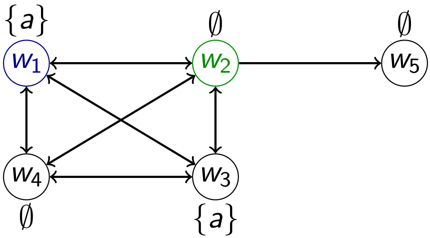
— это шкала Крипке

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \mathrm{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} \in \xi(w)$ $\qquad (\mathrm{x} \in \mathrm{Var})$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \,\&\, \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \models \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$

Например, $\qquad (\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

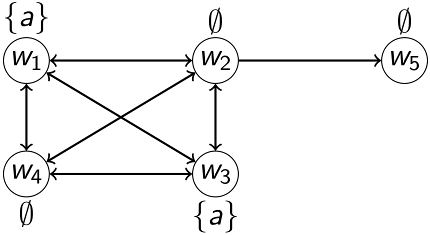
$$\mathcal{I}, w_1 \models a, \qquad \mathcal{I}, w_2 \not\models a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \varphi \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \not\models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \not\models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



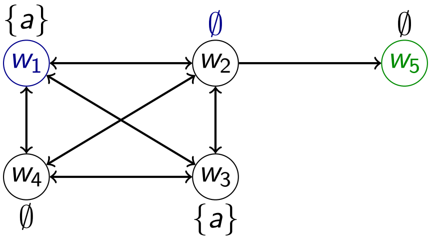
— это модель Крипке $(\mathcal{I})$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi \quad \Leftrightarrow$
  для любой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

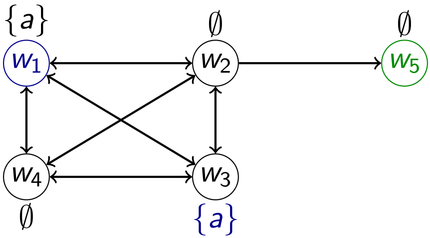
$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \models \Box a$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Diamond\varphi \quad \Leftrightarrow$
  существует w-альтернатива w',
  такая что верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$

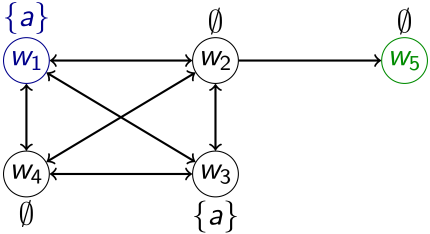


— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond a$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$

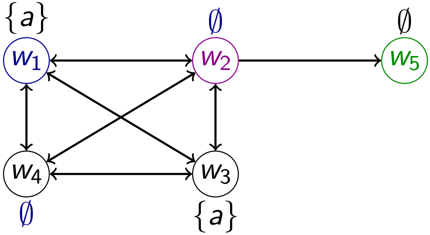


— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$\mathcal{I}, w_1 \models \Box\Diamond a$, $\qquad$ $\mathcal{I}, w_5 \models \Box\Diamond a$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Diamond\Box a$, $\quad \mathcal{I}, w_2 \models \Diamond\Box a \quad$, $\mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond\Box a$

Модальные логики: семантика Крипке

Пусть $\mathcal{F}$ — шкала Крипке, $\mathcal{I}$ — модель Крипке, и φ, ψ — формулы модальной логики

Тогда

- формула φ истинна в модели $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$), если для любого мира w модели $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- формула φ истинна на шкале $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models \varphi$), если для любой модели Крипке $\mathcal{J}$, основанной на $\mathcal{F}$, верно $\mathcal{J} \models \varphi$
- формула φ общезначима ($\models \varphi$), если для любой шкалы $\mathcal{F}$ верно $\mathcal{F} \models \varphi$
- формулы φ и ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. **Для любой формулы φ верно: $\Diamond\varphi \sim \neg\Box\neg\varphi$**

Доказательство. "Для любой альтернативы верно φ" = "Не существует альтернативы, такой что не-φ" ▼

Утверждение

Для любой формулы φ верно: если $\models \varphi$, то $\models \Box\varphi$

Доказательство. Если φ верно в любом мире любой модели, то φ верно и в любой альтернативе любого мира любой модели ▼

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение

Для любых формул φ, ψ верно: $\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Доказательство. Рассмотрим модель $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мир w

Предположим, что $\mathcal{I}, w \not\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Тогда

- $\mathcal{I}, w \models \Box(\varphi \to \psi)$, а значит, для каждой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi \to \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi$, а значит, для каждой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$ — и, по *семантике связки* $\to$, $\mathcal{I}, w' \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \not\models \Box\psi$, а значит, существует w-альтернатива w', такая что $\mathcal{I}, w' \not\models \psi$, что противоречит предыдущему пункту ▼

Эпистемические логики

Смыслом модальностей могут определяться и другие законы

Для примера рассмотрим *эпистемическую логику*, в которой $\Box$ имеет смысл "я знаю", а $\Diamond$ — "я допускаю"

Если "я" — **идеальный познающий субъект**, то совокупность моих знаний и допущений должна подчиняться, помимо общих законов модальных логик, *как минимум* таким законам:

- мои знания верны
  $\Box\varphi \to \varphi$ (закон адекватности знания)
- мне известно, что именно я знаю
  $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (закон позитивной интроспекции)
- мне известно, что именно я **не** знаю
  $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$ (закон негативной интроспекции)

Эпистемические логики

Рассмотрим произвольную шкалу Крипке $\mathcal{F} = (W, R)$

Утверждение

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \varphi$ **верно для любой формулы** φ

$\Leftrightarrow$

отношение R **рефлексивно**

Утверждение

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ **верно для любой формулы** φ

$\Leftrightarrow$

отношение R **транзитивно**

Утверждение. **Пусть отношение** R **транзитивно. Тогда**

$\mathcal{F} \models \neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$ **верно для любой формулы** φ

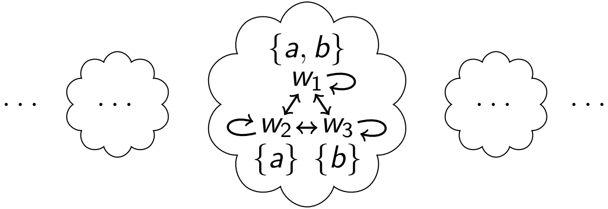
$\Leftrightarrow$

отношение R **симметрично**

Доказательство. Самостоятельно

Эпистемические логики

Следствие: модель Крипке идеального познающего субъекта — это модель $\mathcal{I}$, миры которой разбиваются на *классы эквивалентности* по отношению переходов:

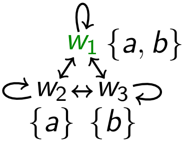


Пояснение

Пусть w_1 — мир достоверных фактов

Тогда мирами класса эквивалентности w_1 описываются всевозможные допущения об истинности высказываний, не противоречащие знаниям познающего субъекта

Эпистемические логики



Пояснение

- a — это факт, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \models a$$

- ..., но моих знаний недостаточно, чтобы это утверждать, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a$$

- ..., но и опровергнуть a я тоже не могу

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a$$

- а что я точно знаю, так это то, что если не a, то обязательно b

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Box(\neg a \to b)$$

Эпистемические логики

В более широкой и “полезной” постановке задачи познающий субъект

- может изменять мир согласно своим скромным возможностям
- может взаимодействовать с другими такими же субъектами, обмениваясь с ними знаниями
- пытается достичь некоторой цели, кооперируясь или конкурируя с другими субъектами

Таких взаимодействующих субъектов принято называть агентами,
а совокупность всех агентов
с описанием их возможностей и целей — мультиагентной системой

Каждому агенту a такой системы присваивается своя эпистемическая модальность $\Box_a$: “агент a знает, что ...”

Иногда рассматриваются и групповые модальности — например, $\Box_\forall$: “все агенты знают, что ...”

Эпистемические логики

Пример: задача о трёх мудрецах

Король призвал трёх мудрецов, показал им три чёрные шапки и две белые, завязал глаза, надел на мудрецов чёрные шапки, спрятал белые и развязал глаза

“Из пяти шапок, что я показал, три надеты на вас”, —

сказал король

“Знаете ли вы, какая на вас шапка?” — спросил король

“Нет, не знаю”, хором ответили мудрецы

“Знаете ли вы, какая на вас шапка?” — повторил король

“Нет, не знаю”, хором ответили мудрецы

“Знаете ли вы, какая на вас шапка?” — ещё раз повторил король

“**Да, чёрная**”, хором ответили мудрецы

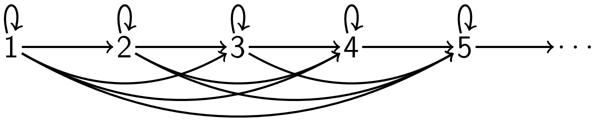
Как может выглядеть ход рассуждений мудрецов в терминах эпистемической логики?

Темпоральные логики

Темпоральная логика — это модальная логика (*или её расширение*), в которой модальности $\Box$ и $\Diamond$ имеют значения "всегда [в будущем]" и "когда-нибудь [в будущем]"

Шкалой Крипке темпоральной логики описывается течение времени: миры — это моменты времени, а отношение достижимости миров — это порядок моментов времени

Пример: шкала дискретного линейного отсчёта времени



Пропозициональные переменные формул темпоральных логик — это атомарные высказывания, истинность которых может изменяться с течением времени

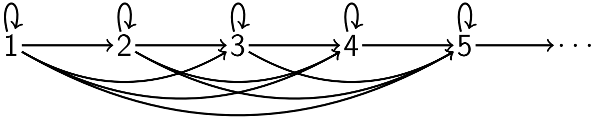
Темпоральные логики

Время может истолковываться по-разному, и в зависимости от истолкования (*то есть точного вида рассматриваемых шкал*) могут получаться разные темпоральные логики, например:

- Логика линейного времени
  (**LTL**, **L**inear **T**emporal **L**ogic)
  - время дискретно линейно течёт вперёд
  - формула — это свойство линейного развития событий
- Логика деревьев вычислений
  (**CTL**, **C**omputation **T**ree **L**ogic)
  - время — это частично упорядоченное множество, которым описываются все варианты развития событий
  - формула — это высказывание о возможности и невозможности заданного развития событий с учётом всех вариантов

Логика линейного времени (LTL)

LTL-шкала — это естественно упорядоченный натуральный ряд (моментов времени):



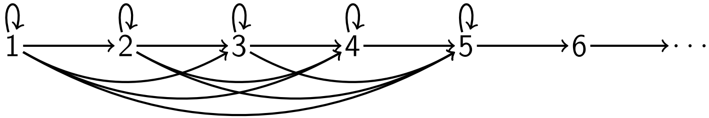
LTL-интерпретация — это модель Крипке, основанная на LTL-шкале

Модальности $\Box$ и $\Diamond$ в LTL обозначаются символами
G (**G**lobally) и **F** (**F**uture)

К ним добавляются и другие модальности — о них и об этой логике в целом подробнее будет рассказано в заключительных лекциях

Логика линейного времени (LTL)

Пример:



Логика линейного времени (LTL)

Пример: рассмотрим такую LTL-интерпретацию $\mathcal{I}$ с оценкой элементарных событий, повторяющейся с периодом 4:

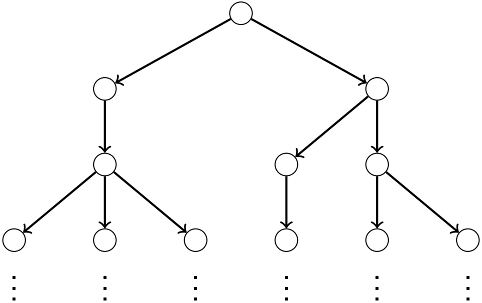
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & \cdots \\
\emptyset & & \{q\} & & \{p\} & & \{p, q\} & & \emptyset & & \{q\} & &
\end{array}$$

Справедливы следующие соотношения:

- в момент времени 1 неверно p и верно $p \to q$
$$\mathcal{I}, 1 \not\models p, \qquad \mathcal{I}, 1 \models p \to q$$
- p иногда бывает верным, но не всегда
$$\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{F}p, \qquad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{G}p$$
- p бесконечно часто бывает верным, но нет такого момента, начиная с которого p всегда верно
$$\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{GF}p, \qquad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{FG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Течение времени в CTL описывается ориентированным деревом, содержащим только бесконечные ветви:



CTL-шкала — это шкала Крипке, являющаяся рефлексивно-транзитивным замыканием такого дерева

CTL-интерпретация — это модель Крипке, основанная на CTL-шкале

Логика деревьев вычислений (CTL)

В логике деревьев вычислений модальности $\Box$, $\Diamond$ обозначаются записями **AG** и **EF**

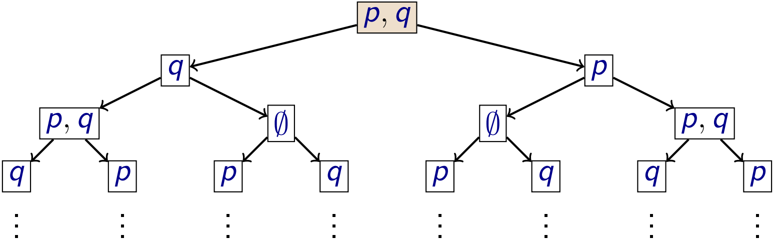
CTL содержит и другие модальности — например, **EG** и **AF**

Значение этих модальностей определяется так:

- $\mathcal{I}, v \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$ существует ветвь дерева, исходящая из v, такая что для каждой вершины v' этой ветви верно $\mathcal{I}, v' \models \varphi$
- $\mathcal{I}, v \models \mathbf{AF}\varphi \Leftrightarrow$ в каждой ветви дерева, исходящей из v, существует вершина v', такая что $\mathcal{I}, v' \models \varphi$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую CTL-интерпретацию $\mathcal{I}$
(при переходе влево изменяется значение p, вправо — значение q):

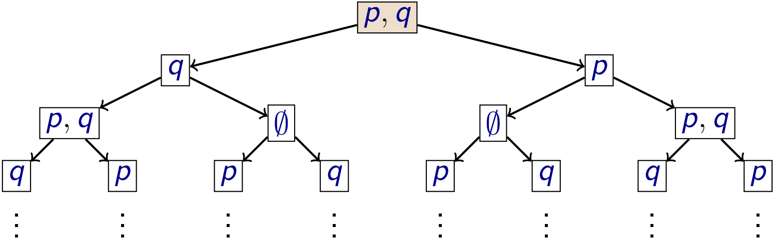


Справедливы следующие соотношения:

- в начале развития событий верно p, но события могут развиваться так, что p станет неверным
$$\mathcal{I}, \square \models p, \qquad \mathcal{I}, \square \models \mathbf{EF}\neg p$$
- есть вариант развития событий, при котором p всегда остаётся верным, но не для всех вариантов это так
$$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{EG}p, \qquad \mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую CTL-интерпретацию $\mathcal{I}$
(при переходе влево изменяется значение p, вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- как бы ни развивались события, всегда есть способ в дальнейшем сделать p и q одновременно верными
$$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{AGEF}(p \,\&\, q)$$
- утверждение "после возникновения события p обязательно рано или поздно возникает событие q" неверно
$$\mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}(p \to \mathbf{AF}q)$$