Математическая логика

(mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 14

Модальные логики
Эпистемические логики
Темпоральные логики

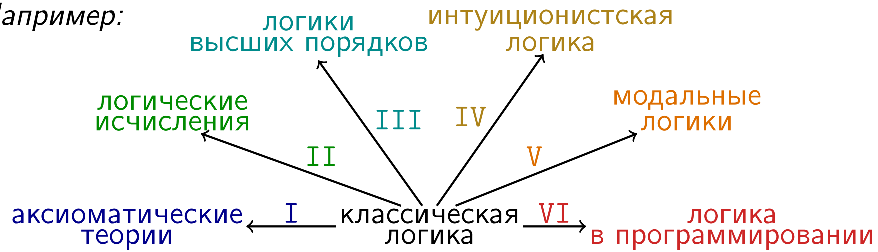
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

Что изучает логика

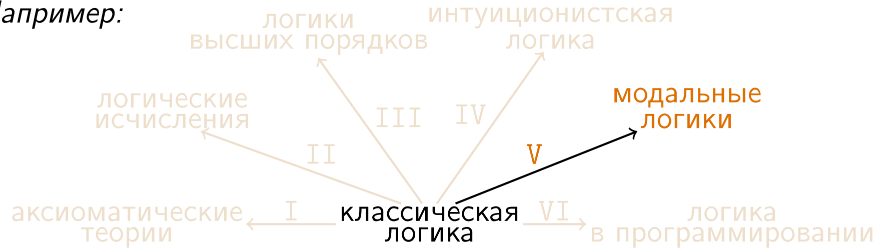
Например:



I	Специальные интерпретации логических формул
II	Другие формы доказательного вывода
III	Расширенное применение логических операций
IV	Другая семантика логических операций
V	Другие логические операции
VI	Логические методы решения нелогических задач
...	...

Что изучает логика

Например:



I Специальные интерпретации логических формул
II Другие формы доказательного вывода
III Расширенное применение логических операций
IV Другая семантика логических операций
V Другие логические операции
VI Логические методы решения нелогических задач
... ...

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима всегда близко

3: Зима бывает близко

Если отбросить всё лишнее, то для высказывания *1* справедлива одна из двух оценок:
правда, если зима действительно близко, и
неправда, если это не так

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ "зима близко", то

1: x *2:* всегда x *3:* иногда бывает x

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима всегда близко

3: Зима бывает близко

Слова, используемые как уточнение истинностной оценки высказывания, называются модальностями (*лат. modus — мера*)

"Всегда" и "иногда" — это темпоральные модальности (модальности времени) (*лат. tempus — время*)

Можно сказать, что "всегда" и "иногда" — это $\forall$ и $\exists$, но тогда:

- как записать **все** свойства времени?
- если даже удастся описать все эти свойства, то будет ли получившаяся *аксиоматическая теория* разрешимой?

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Я знаю, что зима близко

3: Я допускаю возможность того, что зима близко

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ "зима близко", то

1: x *2:* известно, что x *3:* допустимо x

"Известно" и "допустимо" — это эпистемические модальности (модальности знания) (*др.-греч. ἐπιστήμη — знание*)

Если "известно" и "допустимо" трактовать как $\forall$ и $\exists$, то как выглядят *предметы* и *аксиомы* знаний?

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима должна быть близко

3: Зима имеет право быть близко

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ “зима близко”, то

1: x *2:* должно быть x *3:* имеет право быть x

“Должен” и “имеет право” — это деонтические модальности (модальности долга) (*др.-греч.* δέον — должное)

А как выглядит *теория* долга?

В *рациональных* высказываниях используется великое множество разных модальностей, и точно описать их смысл в рамках классической логики — непростая и иногда невыполнимая задача

Модальные логики: вступление

Чаще всего (*хотя и не всегда*) в высказываниях используются модальности двух двойственных видов:

Модальность необходимого	Модальность возможного
необходимо	возможно
обязательно	не исключено
всегда	иногда
должен	имеет право
знает	предполагает
доказуемо	непротиворечиво
$\Box$	$\Diamond$

Хотелось бы иметь единообразный способ определения смысла модальностей $\Box$ и $\Diamond$ — и такой способ используется в

модальных логиках

Модальные логики: синтаксис

Синтаксис формул *пропозициональных* модальных логик над множеством переменных Var:
$\varphi\ ::=\ \mathrm{x}\ \mid\ (\neg\varphi)\ \mid\ (\varphi\,\&\,\varphi)\ \mid\ (\varphi\vee\varphi)\ \mid\ (\varphi\to\varphi)\ \mid\ (\Box\varphi)\ \mid\ (\Diamond\varphi)$,
где φ — формула и $\mathrm{x}\in$ Var

Это *синтаксис формул логики высказываний*, расширенный возможностью расстановки модальностей необходимого и возможного над любыми (под)формулами

Приоритет операций: $\neg$, $\Box$ и $\Diamond$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

Пример формулы: $\Diamond\mathrm{x}\,\&\,\Box\neg\Diamond(\mathrm{x}\vee\mathrm{y})$
"*возможно* x*, и при этом необходимо невозможно, что* x *или* y"

В этой формуле пока ещё неясно, что подразумевается под "необходимостью" и "возможностью":
определение этих понятий — часть *семантики* формулы

Модальные логики: семантика Крипке

Описание семантики начнём с примера: **Зима *бывает* близко**

Представим себе любое строгое определение зимы и того, в каких случаях зима считается близкой

Если остановить время и задаться вопросом, близко зима или нет, то ответ на этот вопрос (**да** или **нет**) можно определить как значение переменной x

Время течёт, и мир меняется, как и значение переменной x:

$$\underset{\neg x}{\text{сейчас}} \longrightarrow \underset{\neg x}{\text{через минуту}} \rightarrow \underset{\neg x}{\text{через месяц}} \rightarrow \underset{x}{\text{через полгода}}$$

Ответ на вопрос “$\Diamond x$?” в так меняющемся мире — **да**, x бывает

Другими словами, существует много взаимосвязанных **миров** (здесь — моментальных слепков вселенной), в разных мирах значения x могут быть разными, и модальностью $\Diamond$ описывается взаимосвязь значений x во многих мирах

Модальные логики: семантика Крипке

Модель Крипке (над переменными Var) — это система (W, R, ξ), где

- W — множество состояний (возможных миров)
- $R \subseteq W \times W$ — отношение переходов между мирами
  - "$R(w_1, w_2)$" = "$w_1 \to w_2$"
- $\xi : W \to 2^{\mathsf{Var}}$ — оценка переменных для каждого мира
  - "$\mathtt{x} \in \xi(w)$" = "переменная $\mathtt{x}$ истинна в мире w"

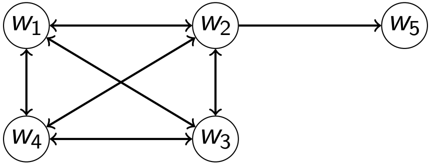
Шкала Крипке (*Kripke frame*), на которой основывается модель (W, R, ξ), — это пара (W, R)

Если $(w, w') \in R$, то w' — мир, альтернативный для w (w-альтернатива)

Модель Крипке — это *интерпретация* модальной логики

Модальные логики: семантика Крипке

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



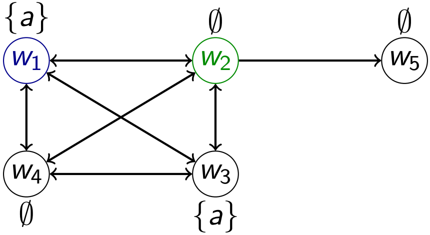
— это шкала Крипке

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \mathrm{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} \in \xi(w)$ $\qquad (\mathrm{x} \in \mathrm{Var})$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \,\&\, \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \models \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$

Например, $\qquad (\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

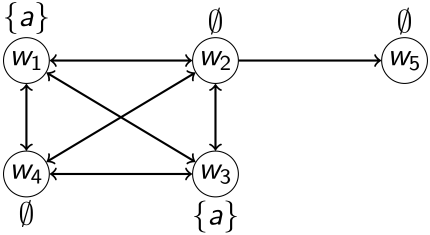
$$\mathcal{I}, w_1 \models a, \qquad \mathcal{I}, w_2 \not\models a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \varphi \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \not\models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \not\models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



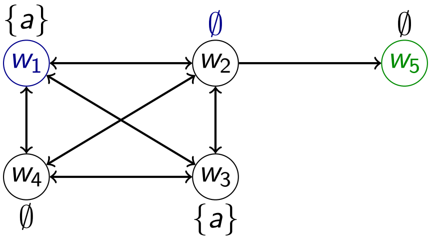
— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi \quad \Leftrightarrow$
  для любой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

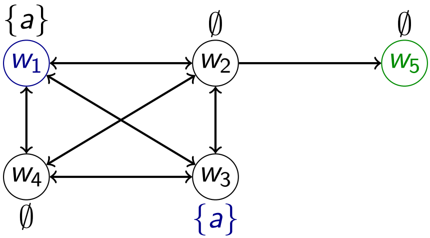
$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \models \Box a$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Diamond\varphi \quad \Leftrightarrow$
  существует w-альтернатива w',
  такая что верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$

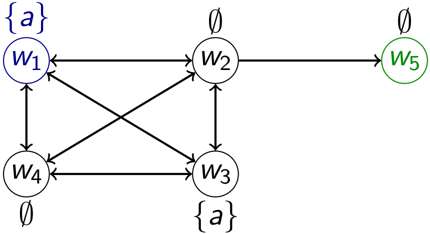


— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, $(\mathsf{Var} = \{a\})$

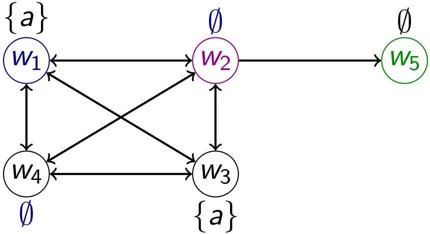


— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$\mathcal{I}, w_1 \models \Box\Diamond a$, $\qquad \mathcal{I}, w_5 \models \Box\Diamond a$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, (Var $= \{a\}$)



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Diamond\Box a$, $\mathcal{I}, w_2 \models \Diamond\Box a$, $\mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond\Box a$

Модальные логики: семантика Крипке

Пусть $\mathcal{F}$ — шкала Крипке, $\mathcal{I}$ — модель Крипке, и φ, ψ — формулы модальной логики

Тогда

- формула φ истинна в модели $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$), если для любого мира w модели $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- формула φ истинна на шкале $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models \varphi$), если для любой модели Крипке $\mathcal{J}$, основанной на $\mathcal{F}$, верно $\mathcal{J} \models \varphi$
- формула φ общезначима ($\models \varphi$), если для любой шкалы $\mathcal{F}$ верно $\mathcal{F} \models \varphi$
- формулы φ и ψ равносильны ($\varphi \approx \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. **Для любой формулы φ верно: $\Diamond\varphi \approx \neg\Box\neg\varphi$**

Доказательство. "Для любой альтернативы верно φ" = "Не существует альтернативы, такой что не-φ" ▼

Утверждение

Для любой формулы φ верно: если $\models \varphi$, то $\models \Box\varphi$

Доказательство. Если φ верно в любом мире любой модели, то φ верно и в любой альтернативе любого мира любой модели ▼

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение

Для любых формул φ, ψ верно: $\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Доказательство. Рассмотрим модель $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мир w

Предположим, что $\mathcal{I}, w \not\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Тогда

- $\mathcal{I}, w \models \Box(\varphi \to \psi)$, а значит, для каждой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi \to \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi$, а значит, для каждой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$ — и, по *семантике связки* $\to$, $\mathcal{I}, w' \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \not\models \Box\psi$, а значит, существует w-альтернатива w', такая что $\mathcal{I}, w' \not\models \psi$, чего быть не может ▼

Эпистемические логики

Смыслом модальностей могут определяться и другие законы

Для примера рассмотрим *эпистемическую логику*, в которой $\Box$ имеет смысл "я знаю", а $\Diamond$ — "я допускаю"

Если "я" — **идеальный познающий субъект**, то совокупность моих знаний и допущений должна подчиняться, помимо общих законов модальных логик, *как минимум* таким законам:

- мои знания верны
  $\Box\varphi \to \varphi$ (закон адекватности знания)
- мне известно, что именно я знаю
  $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (закон позитивной интроспекции)
- мне известно, что именно я **не** знаю
  $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$ (закон негативной интроспекции)

Эпистемические логики

Рассмотрим произвольную шкалу Крипке $\mathcal{F} = (W, R)$

Утверждение

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \varphi$ **верно для любой формулы** φ

$\Leftrightarrow$

отношение R **рефлексивно**

Утверждение

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ **верно для любой формулы** φ

$\Leftrightarrow$

отношение R **транзитивно**

Утверждение. **Пусть отношение** R **транзитивно. Тогда**

$\mathcal{F} \models \neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$ **верно для любой формулы** φ

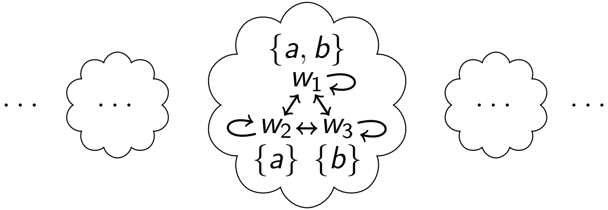
$\Leftrightarrow$

отношение R **симметрично**

Доказательство. Самостоятельно

Эпистемические логики

Следствие: модель Крипке идеального познающего субъекта — это модель $\mathcal{I}$, миры которой разбиваются на *классы эквивалентности* отношением переходов:

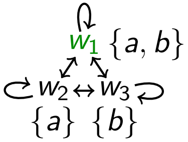


Пояснение

Пусть w_1 — мир достоверных фактов

Тогда класс эквивалентности мира w_1 — это совокупность всех (не)знаний познающего субъекта

Эпистемические логики



Пояснение

- a — это факт, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \models a$$

- ..., но моих знаний недостаточно, чтобы это утверждать, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a$$

- ..., но и опровергнуть a я тоже не могу

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a$$

- а что я точно знаю, так это то, что если не a, то обязательно b

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Box(\neg a \to b)$$

Эпистемические логики

В более широкой постановке, чаще возникающей на практике, познающий субъект не “изучает свои знания в одиночестве”, а пытается добиться каких-либо целей, действуя в качестве агента в рамках мультиагентной системы: в коллективе таких же агентов, кооперирующихся или конкурирующих с ним, в котором

- агенты в каждый момент времени располагают знаниями о некоторых фактах и о знаниях других агентов
- агенты совершают действия, пытаясь достичь цели и основываясь на своих текущих знаниях
- наблюдая действия друг друга, агенты могут получать новые знания

Эпистемические логики

Пример: Вы (агент 1), общаясь с банкоматом (агентом 2), обмениваетесь знаниями (информация на чипе банковской карты, пин-код, баланс счёта) по особому **протоколу** с целью получить стипендию с карты; злоумышленник (агент 3), имея заданные средства “подглядывания” за вашим общением, пытается получить знания, достаточные для кражи следующей Вашей стипендии — это мультиагентная система, состоящая из трёх агентов

В таких системах каждому агенту a присваивается своя эпистемическая модальность $\Box_a$: “агент a знает, что ...”

Кроме того, иногда вводятся групповые модальности — например, $\Box_\forall$: “все агенты знают, что ...”

Эпистемические логики

Другой пример: задача о трёх мудрецах

Король призвал трёх мудрецов, показал им три чёрные шапки и две белые, завязал глаза, надел на мудрецов чёрные шапки, спрятал белые и развязал глаза

"Из пяти шапок, что я показал, три надеты на вас", —

сказал король

"Знаете ли вы, какая на вас шапка?" — спросил король

"Нет, не знаю", хором ответили мудрецы

"Знаете ли вы, какая на вас шапка?" — повторил король

"Нет, не знаю", хором ответили мудрецы

"Знаете ли вы, какая на вас шапка?" — ещё раз повторил король

"**Да, чёрная**", хором ответили мудрецы

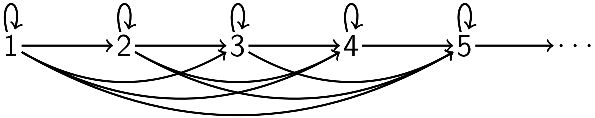
Как законы и ход рассуждений мудрецов записываются в терминах эпистемической логики?

Темпоральные логики

Темпоральная логика — это модальная логика (*или её расширение*), в которой модальности $\Box$ и $\Diamond$ имеют значения "всегда [в будущем]" и "когда-нибудь [в будущем]"

Шкалой Крипке темпоральной логики описывается течение времени: миры — это моменты времени, а отношение достижимости миров — это порядок моментов времени

Пример: шкала дискретного линейного отсчёта времени



Пропозициональные переменные формул темпоральных логик — это элементарные события, которые могут происходить (или не происходить) в каждый момент времени

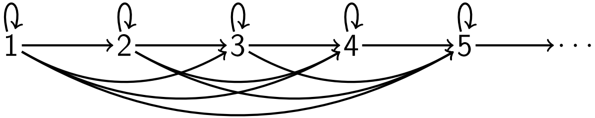
Темпоральные логики

Время может истолковываться по-разному, и в зависимости от истолкования (*то есть точного вида рассматриваемых шкал*) могут получаться разные темпоральные логики, например:

- Логика линейного времени
  (**LTL**, **L**inear **T**emporal **L**ogic)
  - время дискретно линейно течёт вперёд
  - формула — это свойство линейного развития событий
- Логика деревьев вычислений
  (**CTL**, **C**omputation **T**ree **L**ogic)
  - время — это частично упорядоченное множество, которым описываются все варианты развития событий
  - формула — это высказывание о возможности и невозможности заданного развития событий с учётом всех вариантов

Логика линейного времени (LTL)

LTL-шкала — это естественно упорядоченный натуральный ряд (моментов времени):



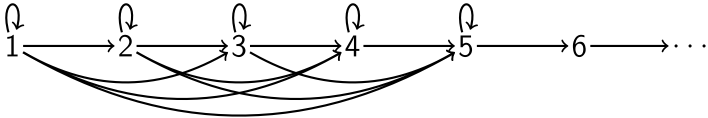
LTL-интерпретация — это модель Крипке, основанная на LTL-шкале

Модальности $\Box$ и $\Diamond$ в LTL обозначаются символами
G (**G**lobally) и **F** (**F**uture)

К ним добавляются и другие модальности — о них и об этой логике в целом подробнее будет рассказано в заключительных лекциях

Логика линейного времени (LTL)

Пример:



Логика линейного времени (LTL)

Пример: рассмотрим такую LTL-интерпретацию $\mathcal{I}$ с оценкой элементарных событий, повторяющейся с периодом 4:

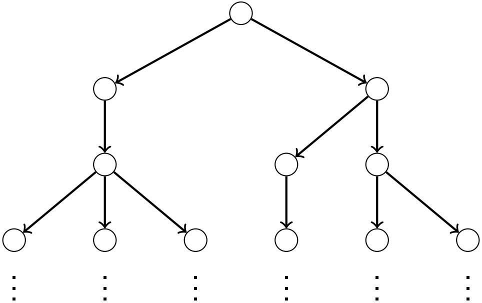
$$\underset{\emptyset}{1} \longrightarrow \underset{\{q\}}{2} \longrightarrow \underset{\{p\}}{3} \longrightarrow \underset{\{p,q\}}{4} \longrightarrow \underset{\emptyset}{5} \longrightarrow \underset{\{q\}}{6} \longrightarrow \cdots$$

Справедливы следующие соотношения:

- в момент времени 1 неверно p и верно $p \to q$
  $$\mathcal{I}, 1 \not\models p, \qquad \mathcal{I}, 1 \models p \to q$$
- p иногда бывает верным, но не всегда
  $$\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{F}p, \qquad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{G}p$$
- p бесконечно часто бывает верным, но нет такого момента, начиная с которого p всегда верно
  $$\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{GF}p, \qquad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{FG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Течение времени в CTL описывается ориентированным деревом, содержащим только бесконечные ветви:



CTL-шкала — это шкала Крипке, являющаяся рефлексивно-транзитивным замыканием такого дерева

CTL-интерпретация — это модель Крипке, основанная на CTL-шкале

Логика деревьев вычислений (CTL)

В логике деревьев вычислений модальности $\Box$, $\Diamond$ обозначаются записями **AG** и **EF**

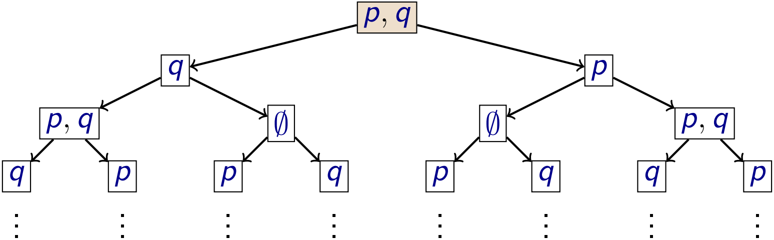
CTL содержит и другие модальности — например, **EG** и **AF**

Значение этих модальностей определяется так:

- $\mathcal{I}, v \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$ существует ветвь дерева, исходящая из v, такая что для каждой вершины v' этой ветви верно $\mathcal{I}, v' \models \varphi$
- $\mathcal{I}, v \models \mathbf{AF}\varphi \Leftrightarrow$ в каждой ветви дерева, исходящей из v, существует вершина v', такая что $\mathcal{I}, v' \models \varphi$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую CTL-интерпретацию $\mathcal{I}$
(при переходе влево изменяется значение p, вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- в начале развития событий верно p, но события могут развиваться так, что p станет неверным

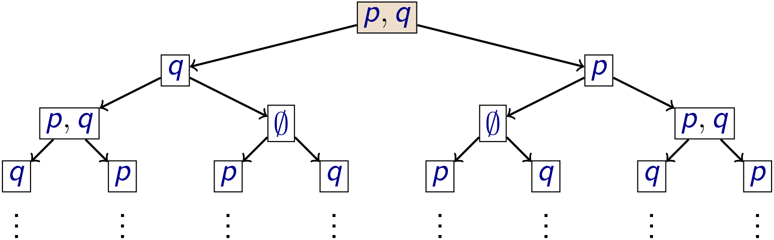
$$\mathcal{I}, \square \models p, \qquad \mathcal{I}, \square \models \mathbf{EF}\neg p$$

- есть вариант развития событий, при котором p всегда остаётся верным, но не для всех вариантов это так

$$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{EG}p, \qquad \mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую CTL-интерпретацию $\mathcal{I}$
(при переходе влево изменяется значение p, вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- как бы ни развивались события, всегда есть способ в дальнейшем сделать p и q одновременно верными

$$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{AGEF}(p \,\&\, q)$$

- утверждение "после возникновения события p обязательно рано или поздно возникает событие q" неверно

$$\mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}(p \rightarrow \mathbf{AF}q)$$