Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2017, весенний семестр

Лекция 14

Доопределение теорий

Теория множеств Цермело-Френкеля: сигнатура, аксиомы, вопрос непротиворечивости

Вступление: итоги лекции 13

Наивная теория множеств допускает

- неправдоподобные умозаключения о бесконечных множествах, основанные на понятиях и способах рассуждений, “рациональных” для конечных множеств
  - **это “хорошие” парадоксы:** если описать подходящий набор понятий и способов рассуждения о множествах, то они исчезнут сами собой
- **безусловные логические противоречия**
  - **это “плохие” парадоксы:** они не исчезают даже при наличии строгого *базового* аппарата работы с множествами

Вступление: итоги лекции 13

Чтобы уметь работать с множествами, не имея ни хороших, ни плохих парадоксов, достаточно предложить адекватную

аксиоматическую теорию множеств

Если это получится, то можно будет попробовать[1] дать такое определение множества:

Множество — это
предмет *любой* модели аксиоматической теории множеств

[1] Это слово здесь важно, но об этом разговор будет потом

Вступление: итоги лекции 13

Какие возможности должна предоставлять теория множеств?

Например, неплохо было бы уметь

- проверять принадлежность элемента множеству:
$$x \in S$$
- задавать множество перечислением его элементов:
$$\{x_1, \ldots, x_k\}$$
- задавать множество свойством его элементов:
$$\{x \mid \varphi(x)\}$$
- применять теоретико-множественные операции:
$$\bigcup X, \quad X \cup Y, \quad X \cap Y, \quad X \setminus Y, \quad 2^X, \quad \ldots$$
- сравнивать множества:
$$X = Y, X \subseteq Y, X \subset Y$$
- сравнивать мощности множеств:
$$|X| = |Y|, |X| < |Y|$$

Сигнатура теории множеств

Будем пытаться описать теорию множеств
с *как можно меньшей* сигнатурой

Начнём с включения символов $\in$ и $=$ в сигнатуру

На основе этих символов можно явно определить многие базовые множества, отношения и операции:

- $\forall x\, \forall y\, (x \neq y \leftrightarrow \neg x = y)$
- $\forall x\, \forall y\, (x \notin y \leftrightarrow \neg x \in y)$
- $\forall x\, \forall y\, (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \to z \in y))$
- $\forall x\, \forall y\, (x \subset y \leftrightarrow (x \subseteq y \,\&\, x \neq y))$
- $\forall u\, (u \notin \emptyset)$
- схема определений:

$$\forall \widetilde{x}^n\, \forall u\, (u \in \{x_1, \ldots, x_k\} \leftrightarrow (u = x_1 \vee \cdots \vee u = x_k))$$

Сигнатура теории множеств

Будем пытаться описать теорию множеств
с *как можно меньшей* сигнатурой

Начнём с включения символов $\in$ и $=$ в сигнатуру

На основе этих символов можно явно определить многие базовые множества, отношения и операции:

- схема определений:
$$\forall \widetilde{x}^n \, \forall u \, (u \in \{z \mid \varphi(z, \widetilde{x}^n)\} \leftrightarrow \varphi\{z/u\})$$
- $\forall x \, \forall y \, (x \cup y = \{z \mid z \in x \vee z \in y\})$
- $\forall x \, \forall y \, (x \cap y = \{z \mid z \in x \,\&\, z \in y\})$
- $\forall x \, \forall y \, (x \setminus y = \{z \mid z \in x \,\&\, z \notin y\})$
- $\forall x \, (\bigcup x = \{z \mid \exists y \, (y \in x \,\&\, z \in y)\})$
- $\forall x \, (\mathbf{2}^x = \{z \mid z \subseteq x\})$

Сигнатура теории множеств

А можно ли теперь сказать “добавим в теорию все определённые символы и все определяющие аксиомы, исследуем непротиворечивость и полноту полученной теории и скажем, что результаты переносятся и на исходную теорию”?

(Контр)пример: арифметика Пресбургера $\mathcal{T}_{pa}$ непротиворечива и полна, и при этом

- теория $\mathcal{T}_{pa} \cup \{\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{Even}(\mathrm{x}) \leftrightarrow \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{y}))\}$ сигнатуры $\sigma_{pa+\mathrm{Even}}$ непротиворечива и полна
- теория $\mathcal{T}_{pa} \cup \{\mathbf{C} = \mathbf{0} \,\&\, \neg \mathbf{C} = \mathbf{0}\}$ сигнатуры $\sigma_{pa+\mathbf{C}}$ противоречива
- теория $\mathcal{T}_{pa} \cup \{\exists \mathrm{x}\ (\mathbf{C} = \mathrm{x} + \mathrm{x})\}$ сигнатуры $\sigma_{pa+\mathbf{C}}$ неполна

Сигнатура теории множеств

$\exists! \mathrm{x}\ \varphi$ — это сокращение для формулы

$$\exists \mathrm{x}\ \varphi \,\&\, \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{x}'\ (\varphi \,\&\, \varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{x}'\} \to \mathrm{x} = \mathrm{x}')$$

Теорема о непротиворечивости и полноте доопределения теории

Пусть

- $\mathcal{T}$ **— теория с равенством сигнатуры** σ
- A **— аксиома, определяющая символ** s **в сигнатуре** σ **согласно определению** φ
- $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{A\}$ **— теория с равенством сигнатуры** σ_{+s}
- **верно одно из трёх:**
  - s **— предикатный символ**
  - $\mathrm{s} = \mathbf{c}$ **— константа, и** $\models_{\mathcal{T}} \exists! \mathrm{x}_{\mathbf{c}}\ \varphi$
  - $\mathrm{s} = \mathbf{f}^{(n)}$ **— функциональный символ, и** $\models_{\mathcal{T}} \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \exists! \mathrm{x}_{\mathbf{f}}\ \varphi$

Тогда

1. **все модели** $\mathcal{T}$ **могут быть получены из моделей** $\mathcal{T}'$ **удалением оценки** $\overline{\mathrm{s}}$**, и**
2. **теория** $\mathcal{T}$ **полна** $\Leftrightarrow$ **теория** $\mathcal{T}'$ **полна**

Доказательство. Попробуйте сами адаптировать доказательство теоремы о разрешимости доопределения теории

Сигнатура теории множеств

Итог: можно рассуждать о непротиворечивости и полноте теории множеств, доопределяя её

- любыми предикатными символами
  - в частности, можно использовать символы $\neq$, $\notin$, $\subseteq$, $\subset$
- любыми константами $\mathbf{c}$, определяя их формулами $\varphi_{\mathbf{c}}$, такими что предложения $\exists! \mathrm{x}_{\mathbf{c}}\, \varphi_{\mathbf{c}}$ — теоремы теории множеств
- любыми функциональными символами $\mathbf{f}^{(n)}$, определяя их формулами $\varphi_{\mathbf{f}}$, такими что предложения $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \exists! \mathrm{x}_{\mathbf{f}}\, \varphi_{\mathbf{f}}$ — теоремы теории множеств

В рассуждениях о теории множеств, в том числе при описании аксиом, будут использоваться такие символы

Чтобы получить “настоящие” аксиомы исходной сигнатуры, достаточно применить преобразования формулы, описанные в доказательстве теоремы о разрешимости доопределения теории

Сигнатура теории множеств

Можно начать определение теории множеств несколькими способами:

1. это теория с равенством сигнатуры $\left\langle \emptyset, \emptyset, \left\{ \in^{(2)} \right\} \right\rangle$ $\langle \ldots \rangle$
2. это теория сигнатуры $\left\langle \emptyset, \emptyset, \left\{ \in^{(2)}, =^{(2)} \right\} \right\rangle$, содержащая аксиомы равенства и $\langle \ldots \rangle$
3. это теория сигнатуры $\left\langle \emptyset, \emptyset, \left\{ \in^{(2)} \right\} \right\rangle$, в которой предикатный символ $=^{(2)}$ используется как сокращение формулы $\forall \mathtt{u}\, (\mathtt{u} \in \mathtt{x}_1 \leftrightarrow \mathtt{u} \in \mathtt{x}_2) \,\&\, \forall \mathtt{u}\, (\mathtt{x}_1 \in \mathtt{u} \leftrightarrow \mathtt{x}_2 \in \mathtt{u})$ $\langle \ldots \rangle$

4+. ...

Остановимся на первом способе: определим теорию множеств как теорию с равенством сигнатуры $\left\langle \emptyset, \emptyset, \left\{ \in^{(2)} \right\} \right\rangle$

Аксиома объёмности

Прежде всего разберёмся с равенством множеств

Естественное определение равенства множеств:

множества равны $\Leftrightarrow$ они состоят из одних и тех же элементов

Если мы хотим придать символу $=$
значение равенства множеств, то предложение

$$\forall x\, \forall y\, (x = y \leftrightarrow \forall u\, (u \in x \leftrightarrow u \in y))$$

должно быть теоремой теории множеств

Очевидно, что

- $\models \forall x\, \forall y\, (x = y \to \forall u\, (u \in x \leftrightarrow u \in y))$
- $\not\models \forall x\, \forall y\, (\forall u\, (u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y)$

Аксиома объёмности $A_=$:

$$\forall x\, \forall y\, (\forall u\, (u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y)$$

Аксиомой объёмности гарантируется **единственность** множества, содержащего заданную совокупность элементов

Аксиома пустого множества

Конструктивный способ задания любого множества обязательно начинается с $\emptyset$

$\emptyset$ — это предмет, удовлетворяющий отношению $\mathrm{Empty}^{(1)}$:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Empty}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \forall \mathtt{u}\ \neg(\mathtt{u} \in \mathtt{x}))$$

Но такой предмет не обязан существовать:

$$A_= \not\models \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Empty}(\mathtt{x})$$

Аксиома пустого множества $A_\emptyset$:

$$\exists \mathtt{x}\ \mathrm{Empty}(\mathtt{x})$$

Очевидно, что $\qquad A_=, A_\emptyset \models \exists! \mathtt{x}\ \mathrm{Empty}(\mathtt{x})$

Итог: теперь можно доопределить теорию символом $\emptyset$ (так, как это делалось в начале лекции)

Аксиома пары

Из аксиом $A_=$ и $A_\emptyset$ **не следует** существование/единственность *каких бы то ни было* множеств, кроме $\emptyset$

Добавим в теорию аксиомы, позволяющие доказывать существование (и единственность) *хоть каких-нибудь* множеств, получаемых в результате применения теоретико-множественных операций к существующим множествам

Определим новый предикатный символ:

$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{Pair}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \leftrightarrow \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{u} \in \mathrm{z} \leftrightarrow \mathrm{u} = \mathrm{x} \vee \mathrm{u} = \mathrm{y}))$$

Аксиома пары A_2:

$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \exists \mathrm{z}\ \mathrm{Pair}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$$

И что это означает?

Какие бы *существующие* множества x, y мы ни взяли, всегда существует множество $\mathrm{z} = \{\mathrm{x},\mathrm{y}\}$

Аксиома пары

Теперь можно доказать, что:

- для любого множества $\mathtt{x}$ существует единственное множество $\mathtt{y} = \{\mathtt{x}\}$:
$$A_=, A_2 \models \forall \mathtt{y}\ \exists! \mathtt{x}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathtt{u} \in \mathtt{x} \leftrightarrow \mathtt{u} = \mathtt{y})$$
- для любых множеств $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ существует единственное множество $\mathtt{z} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$:
$$A_=, A_2 \models \forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ \exists! \mathtt{z}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathtt{u} \in \mathtt{z} \leftrightarrow (\mathtt{u} = \mathtt{x} \lor \mathtt{u} = \mathtt{y}))$$

Итог: можно доопределить теорию символами операций $\mathtt{x} \to \{\mathtt{x}\}$ и $\mathtt{x}, \mathtt{y} \to \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$

Все множества, получаемые из $\emptyset$, $\{\cdot\}$ и $\{\cdot, \cdot\}$, имеют мощность 0, 1 или 2

А как показать существование более мощных множеств — например, мощностей $3, 4, \ldots$?

Аксиома объединения

Самый простой способ получения более мощных множеств из менее мощных — это использование операции объединения множеств, например:

$$\{0, 1\} \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3$$
$$3 \cup \{3\} = 4$$
$$\ldots$$

Каждую пару множеств $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ можно объединить в множество $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$, а значит, операция объединения пары множеств $\mathtt{x} \cup \mathtt{y}$ — частное проявление операции $\bigcup \mathtt{X}$:

$$\mathrm{x} \cup \mathrm{y} = \bigcup \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$$

Введём такое отношение:

$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{BigUnion}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leftrightarrow \forall \mathrm{u}\, (\mathrm{u} \in \mathrm{x} \leftrightarrow \exists \mathrm{v}\, (\mathrm{v} \in \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{u} \in \mathrm{v})))$$

Аксиома объединения $A_{\bigcup}$:

$$\forall \mathrm{y}\, \exists \mathrm{x}\, \mathrm{BigUnion}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Аксиома объединения

Теперь можно доказать, что:

- для любого множества $\mathtt{x}$ существует единственное объединение $\mathtt{y} = \bigcup \mathtt{x}$:
$$A_=, A_\bigcup \models \forall \mathtt{x}\ \exists! \mathtt{y}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathtt{u} \in \mathtt{y} \leftrightarrow \exists \mathtt{v}\ (\mathtt{v} \in \mathtt{x} \,\&\, \mathtt{u} \in \mathtt{v}))$$
- для любых множеств $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ существует единственное объединение $\mathtt{z} = \mathtt{x} \cup \mathtt{y}$:
$$A_=, A_2, A_\bigcup \models \forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ \exists! \mathtt{z}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathtt{u} \in \mathtt{z} \leftrightarrow (\mathtt{u} \in \mathtt{x} \vee \mathtt{u} \in \mathtt{y}))$$
- существует и единственно **любое** множество, состоящее из заданного конечного числа *существующих* множеств:
$$\{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{\mathtt{n}-1}, \mathtt{x}_\mathtt{n}\} = \bigcup \{\{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{\mathtt{n}-1}\}, \{\mathtt{x}_\mathtt{n}\}\}$$

Итог: теперь можно доопределить теорию символами операций $\mathtt{x} \to \bigcup \mathtt{x}$, $\mathtt{x}, \mathtt{y} \to \mathtt{x} \cup \mathtt{y}$ и $\widetilde{\mathtt{x}}^\mathtt{n} \to \{\widetilde{\mathtt{x}}^\mathtt{n}\}$

А откуда взять бесконечные множества?

Аксиома бесконечности

Самое известное бесконечное множество — это множество натуральных чисел (*с нолём*):

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$

Индуктивный способ задания множества $\mathbb{N}_0$ выглядит так:

1. $\emptyset \in \mathbb{N}_0$
2. если $\mathrm{u} \in \mathbb{N}_0$, то $\mathrm{u} \cup \{\mathrm{u}\} \in \mathbb{N}_0$

Введём отношение, основанное на этом способе задания:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{BigSet}(\mathrm{x}) \leftrightarrow (\emptyset \in \mathrm{x} \,\&\, \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{u} \in \mathrm{x} \to \mathrm{u} \cup \{\mathrm{u}\} \in \mathrm{x})))$$

Аксиома бесконечности A_∞:

$$\exists \mathrm{x}\ \mathrm{BigSet}(\mathrm{x})$$

Теперь в модели обязано существовать *некоторое* множество S, такое что $\mathbb{N}_0 \subseteq S$

А как выделить подмножество $\mathbb{N}_0$ из множества S?

Схема выделения

$\mathtt{z}$ — натуральное число в том и только в том случае, если:

- если $\mathtt{z} \neq \emptyset$, то $\mathtt{z}$ представимо в виде $\mathtt{u} \cup \{\mathtt{u}\}$
- если $\mathtt{v} \in \mathtt{z}$ и $\mathtt{v} \neq \emptyset$, то $\mathtt{v}$ представим в виде $\mathtt{v} = \mathtt{w} \cup \{\mathtt{w}\}$, где $\mathtt{w} \in \mathtt{z}$

Введём отношение, описывающее натуральность $\mathtt{z}$:

$$\forall \mathtt{z}\, (\mathrm{N}(\mathtt{z}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\mathtt{z} = \emptyset \vee \exists \mathtt{u}\, (\mathtt{z} = \mathtt{u} \cup \{\mathtt{u}\}))\,\& \\ \forall \mathtt{v}\, (\mathtt{v} \in \mathtt{z} \to \mathtt{v} = \emptyset \vee \exists \mathtt{w}\, (\mathtt{w} \in \mathtt{z}\,\&\, \mathtt{v} = \mathtt{w} \cup \{\mathtt{w}\})) \end{array} \right))$$

Адекватно ли определено отношение N?

Если в нашем распоряжении имеются **только** аксиомы $A_=$, $A_\emptyset$, A_2, $A_\bigcup$, то этим отношением допускается такое наивно заданное *рекурсивное* натуральное число:

$$n_\infty = n_\infty \cup \{n_\infty\}$$

Схема выделения

Далее будет описана аксиома $A_{\downarrow}$, исключающая существование такого числа n_{∞}

Сейчас будем полагать, что при наличии этой аксиомы N — адекватное определение натуральности числа

Тогда множество натуральных чисел можно задать так:

$$\mathbb{N}_0 = \{\mathrm{z} \mid \mathrm{z} \in S \,\&\, \mathrm{N}(\mathrm{z})\}$$

Введём схему отношений, позволяющих выделять подмножества заданного множества:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{Subset}_{\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}},\mathrm{u},\mathrm{y})}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \leftrightarrow \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{u} \in \mathrm{S} \leftrightarrow (\mathrm{u} \in \mathrm{y} \,\&\, \varphi)))$$

Схема выделения $A_{\subseteq}(\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}, \mathrm{u}, \mathrm{y}))$:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \forall \mathrm{y}\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{Subset}_{\varphi}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Схема выделения

Теперь можно доказать, что:

- существует единственное множество натуральных чисел:
$$A_=, A_\emptyset, A_2, A_\bigcup, A_\infty, A_\subseteq(\mathrm{N}), A_\downarrow \models \exists! \mathtt{x}\, \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{x} \leftrightarrow \mathrm{N}(\mathtt{z}))$$
- для любого множества $\mathtt{y}$ существует единственное подмножество $\mathtt{x}$ всех его элементов $\mathtt{u}$, удовлетворяющих свойству $\varphi(\mathtt{u}, \mathtt{y})$:
$$A_=, A_\subset(\varphi) \models \forall \mathtt{y}\, \exists! \mathtt{x}\, \forall \mathtt{u}\, (\mathtt{u} \in \mathtt{x} \leftrightarrow (\mathtt{u} \in \mathtt{y}\, \&\, \varphi))$$

Схема выделения

Теперь можно доказать, что:

- для любых множеств x, y существует единственное пересечение $\mathrm{z} = \mathrm{x} \cap \mathrm{y}$: $\quad (\varphi_\cap(\mathrm{x}_1, \mathrm{u})\colon \mathrm{u} \in \mathrm{x}_1)$
$$A_=, A_\subset(\varphi_\cap) \models \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \exists! \mathrm{z}\, \forall \mathrm{u}\, (\mathrm{u} \in \mathrm{z} \leftrightarrow (\mathrm{u} \in \mathrm{x} \,\&\, \mathrm{u} \in \mathrm{y}))$$
- для любых множеств x, y существует единственная разность $\mathrm{z} = \mathrm{x} \setminus \mathrm{y}$: $\quad (\varphi_\setminus(\mathrm{x}_1, \mathrm{u})\colon \mathrm{u} \notin \mathrm{x}_1)$
$$A_=, A_\subset(\varphi_\setminus) \models \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \exists! \mathrm{z}\, \forall \mathrm{u}\, (\mathrm{u} \in \mathrm{z} \leftrightarrow (\mathrm{u} \in \mathrm{x} \,\&\, \mathrm{u} \notin \mathrm{y}))$$

Итог: теперь можно доопределить теорию

- множеством натуральных чисел $\mathbb{N}_0$
- операцией $\mathrm{x} \to \{\mathrm{z} \mid \mathrm{z} \in \mathrm{x} \,\&\, \varphi\}$
- операциями пересечения $\mathrm{x}, \mathrm{y} \to \mathrm{x} \cup \mathrm{y}$ и разности $\mathrm{x}, \mathrm{y} \to \mathrm{x} \setminus \mathrm{y}$ множеств

Аксиома степени

А существуют ли множества более чем счётной мощности?

Операция $\bigcup \mathrm{x}$ позволяет увеличивать мощность, только если перед этим получено **множество** элементов, имеющих достаточно большую мощность

Пока **множество** таких элементов не получено, операция $\bigcup \mathrm{x}$ беполезна для увеличения мощности

“Естественный” способ получения таких элементов — применение операции степени

Введём новое отношение, определяющее степень множества:

$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{Power}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leftrightarrow \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{u} \in \mathrm{x} \leftrightarrow \mathrm{u} \subseteq \mathrm{y}))$$

Аксиома степени A_p:

$$\forall \mathrm{y}\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{Power}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Очевидно, что $A_=, A_p \models \forall \mathrm{y}\ \exists! \mathrm{x}\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{u} \in \mathrm{x} \leftrightarrow \mathrm{u} \subseteq \mathrm{y})$

Итог: теперь можно доопределить теорию операцией $\mathrm{x} \to 2^{\mathrm{x}}$

Схема преобразования

А как доказать существование и единственность множества

$$S = \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \ldots\}?$$

Достаточно **однозначно отобразить** каждый элемент $\mathtt{u}$ множества $\mathbb{N}_0$ в пару $\{0, \mathtt{u}\}$

$Func_A[\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}, \mathtt{x}, \mathtt{y})]$ — это сокращение для

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathtt{x} \in A \to \exists! \mathtt{y}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}, \mathtt{x}, \mathtt{y}))$$

$Im_{A,B}[\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}, \mathtt{x}, \mathtt{y})]$ — это сокращение для

$$\forall \mathtt{y}\ (\mathtt{y} \in B \leftrightarrow \exists \mathtt{x}\ (\mathtt{x} \in A \,\&\, \varphi))$$

Схема преобразования $A_{\to}(\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}, \mathtt{x}, \mathtt{y}))$:

$$\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \forall \mathtt{A}\ (Func_A[\varphi] \to \exists \mathtt{B}\ Im_{A,B}[\varphi])$$

Схема преобразования

Применение схемы преобразования: $(\varphi\colon \mathtt{y} = \{\emptyset, \mathtt{x}\})$

$$A_=, A_2, A_\infty, A_\downarrow, A_\to(\varphi) \models \exists!\mathtt{x}\ Im_{\mathbb{N}_0,\mathtt{x}}[\varphi]$$

Значит, теперь можно доказать существование и единственность множества $\{\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots\}$

А существует ли множество $\left\{\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0}, 2^{2^{\mathbb{N}_0}}, \ldots\right\}$?

Это вопрос крайне непростой — оставим его в стороне, довольствуясь наличием тех множеств, которые уже получены

Осталось описать аксиому $A_\downarrow$

Аксиома регулярности

Было бы неплохо уметь доказывать не только существование, но и **несуществование** множеств

Все предложенные ранее аксиомы утверждают **существование** множеств, но никак не **запрещают** нам предполагать наличие парадоксальных множеств, таких как

- множество всех множеств (парадокс Кантора)
- множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента (парадокс Рассела)

Аксиома регулярности (фундирования) $A_{\downarrow}$:

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \neq \emptyset \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{y} \in \mathrm{x} \,\&\, \mathrm{x} \cap \mathrm{y} = \emptyset))$$

И как это поможет нам исключить парадоксальные множества?

Отрицание аксиомы регулярности трактуется так:

существует непустое множество x*, такое что*
для любого его элемента y *верно* $\mathrm{x} \cap \mathrm{y} \neq \emptyset$

Аксиома регулярности

Существует непустое множество $\mathtt{x}$*, такое что*
для любого его элемента $\mathtt{y}$ *верно* $\mathtt{x} \cap \mathtt{y} \neq \emptyset$

Рассмотрим произвольный элемент $\mathtt{x}_1$ множества $\mathtt{x}$

Тогда $\mathtt{x}_1 \cap \mathtt{x} \neq \emptyset$

Выберем множество $\mathtt{x}_2$, такое что $\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1 \cap \mathtt{x}$

Тогда $\mathtt{x}_2 \cap \mathtt{x} \neq \emptyset$

...

В итоге получим бесконечную последовательность множеств $\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$, такую что

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

Аксиома регулярности утверждает, что такой последовательности множеств **не существует**

Аксиома регулярности

$$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots \text{ — последовательность множеств}$$

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

И как же отсутствие такой последовательности спасает от парадоксов?

Пример: не существует множества всех множеств Ω

$$(\ldots \models \neg\exists\Omega\, \forall \mathtt{u}\ \mathtt{u} \in \Omega)$$

Доказательство. (*от противного*)
Для такого Ω верно соотношение $\Omega \in \Omega$

Тогда можно выписать такую последовательность включений:

$$\Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \ldots$$

Эта последовательность запрещена аксиомой регулярности

Значит, какой бы ни была модель для теории, включающей в себя все описанные ранее аксиомы, множество всех множеств не входит в эту модель

Теория множеств Цермело-Френкеля

Теория Цермело-Френкеля ZF состоит из

- аксиомы объёмности $(A_=)$
- аксиомы пустого множества $(A_\emptyset)$
- аксиомы пары (A_2)
- аксиомы объединения $(A_\bigcup)$
- аксиомы бесконечности (A_∞)
- всех аксиом, порождаемых схемой выделения $(A_\subseteq(\varphi))$
- аксиомы степени (A_p)
- всех аксиом, порождаемых схемой преобразования $(A_\to(\varphi))$
- аксиомы регулярности $(A_\downarrow)$

Мы показали, что теорией ZF исключается парадокс Кантора, основанный на существовании множества всех множеств

Аналогично можно показать, что теорией ZF исключается и парадокс Рассела (а как именно?)

Непротиворечивость теории ZF

А не может ли так случиться, что теория ZF исключает все известные логические противоречия теории множеств, просто потому что она **противоречива**?

Как упоминалось ранее,[1] противоречивые теории абсолютно бессмысленны и потому не должны приниматься во внимание

Насколько трудно показать непротиворечивость теории ZF?

---

[1] Лекция 10, “Основные свойства теорий”

Непротиворечивость теории ZF

- Лекция 3: теория ZF непротиворечива $\Leftrightarrow$ существует модель для этой теории
- Теорией ZF строго описывается набор свойств, которым должны удовлетворять множества
- Если теория ZF непротиворечива, то моделью будет и интерпретация $\mathcal{I}_{set}$, содержащая все (*хорошие*) множества
- Предметная область модели $\mathcal{I}_{set}$ — это множество...

  всех множеств?

Пытаясь рассуждать о непротиворечивости и адекватности теории ZF так, как это всегда делалось раньше, мы пришли к тому, что предметной областью модели для ZF является парадоксальное множество

Значит ли это, что теория ZF противоречива?

Непротиворечивость теории ZF

Парадоксальность предполагаемой модели $\mathcal{I}_{set}$ возникает из-за того, что мы пытаемся рассуждать об истинности теории ZF, используя понятия самой теории

Более того, **любая** интерпретация использует в своём определении понятие “множества”, а значит, *в той или иной мере* будет парадоксальна (*ведь мы так и не знаем, можно ли, используя набор очевидных свойств множеств, получить теоретико-множественное противоречие*)

Лекция 10: теория ZF противоречива $\Leftrightarrow$ существует ZF-общезначимая формула, являющаяся также ZF-противоречивой

Пока что в наших рассуждениях таких формул не возникало

А можно ли изменить определение непротиворечивости теории так, чтобы не использовать в нём понятие множества?

Непротиворечивость теории ZF

Вспомним последнюю часть лекции 10,
"исчисление предикатов":

теория — это исчисление, в котором общезначимые формулы выводятся по правилу modus ponens и правилу обобщения из аксиом исчисления предикатов и аксиом теории

Теория (*как исчисление*) противоречива, если существует формула φ, выводимая вместе со своим отрицанием $\neg\varphi$

Такое определение противоречивости **не приводит к парадоксам** и часто используется теми, кто исследует противоречивость фундаментальных аксиоматических теорий

При этом обоснование непротиворечивости теории в такой постановке довольно трудно: требуется не привести модель теории, а **доказать, что ни для какой выводимой формулы нельзя вывести её отрицание**

Непротиворечивость теории ZF

Ещё один факт, усложняющий проблему проверки противоречивости ZF:

- в рамках теории множеств описывается множество $\mathbb{N}_0$ (лекция 13, аксиома бесконечности и схема выделения)
- также в этой теории можно определить операции сложения и умножения чисел (а как именно?)
- значит, в терминах множеств можно описать фрагмент арифметики над $\mathbb{N}_0$ со сложением и умножением
- этот фрагмент оказывается достаточно выразительным для того, чтобы предъявить **невыводимую** формулу, утверждающую непротиворечивость теории множеств (формула строится примерно так же, как и невыводимая формула в теореме Гёделя о неполноте)

Непротиворечивость теории ZF

Текущее состояние дел:

непротиворечивость теории ZF —
открытая проблема

Конец лекции 14