Математическая логика

и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2016, весенний семестр

Вступление

Итоги лекции 13:

Вступление

Итоги лекции 13:

- наивная теория множеств допускает парадоксы

Вступление

Итоги лекции 13:

- наивная теория множеств допускает парадоксы,
  - показывающие неприменимость некоторых фактов, “очевидных” при рассуждении о конечных совокупностях объектов, к бесконечным совокупностям

Вступление

Итоги лекции 13:

- наивная теория множеств допускает парадоксы,
  - показывающие неприменимость некоторых фактов, “очевидных” при рассуждении о конечных совокупностях объектов, к бесконечным совокупностям

    (в таких парадоксах нет ничего плохого)

Вступление

Итоги лекции 13:

- наивная теория множеств допускает парадоксы,
  - показывающие неприменимость некоторых фактов, "очевидных" при рассуждении о конечных совокупностях объектов, к бесконечным совокупностям
    (в таких парадоксах нет ничего плохого)
  - позволяющие получить логические противоречия

Вступление

Итоги лекции 13:

- наивная теория множеств допускает парадоксы,
  - показывающие неприменимость некоторых фактов, “очевидных” при рассуждении о конечных совокупностях объектов, к бесконечным совокупностям

    (в таких парадоксах нет ничего плохого)
  - позволяющие получить логические противоречия

    (от таких парадоксов неплохо бы избавиться)

Вступление

Итоги лекции 13:

- наивная теория множеств допускает парадоксы,
  - показывающие неприменимость некоторых фактов, “очевидных” при рассуждении о конечных совокупностях объектов, к бесконечным совокупностям

    (в таких парадоксах нет ничего плохого)
  - позволяющие получить логические противоречия

    (от таких парадоксов неплохо бы избавиться)

Один из способов избежать логических противоречий теории множеств — описать непротиворечивую аксиоматическую теорию множеств

Вступление

Какие возможности должна предоставлять аксиоматическая теория множеств?

Вступление

Какие возможности должна предоставлять аксиоматическая теория множеств?

- Проверка принадлежности элемента множеству:

$$x \in S$$

Вступление

Какие возможности должна предоставлять аксиоматическая теория множеств?

- Проверка принадлежности элемента множеству:
$$x \in S$$
- Задание множества через свойство его элементов:
$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

Вступление

Какие возможности должна предоставлять аксиоматическая теория множеств?

- Проверка принадлежности элемента множеству:
$$x \in S$$
- Задание множества через свойство его элементов:
$$\{x \mid \varphi(x)\}$$
(*так, чтобы это не приводило к парадоксам*)

Вступление

Какие возможности должна предоставлять аксиоматическая теория множеств?

- Проверка принадлежности элемента множеству:
$$x \in S$$
- Задание множества через свойство его элементов:
$$\{x \mid \varphi(x)\}$$
(*так, чтобы это не приводило к парадоксам*)
- Построение новых множеств с использованием теоретико-множественных операций:
$$X \cup Y, \quad X \cap Y, \quad X \setminus Y, \quad 2^X, \quad \ldots$$

Вступление

Какие возможности должна предоставлять аксиоматическая теория множеств?

- Проверка принадлежности элемента множеству:
$$x \in S$$
- Задание множества через свойство его элементов:
$$\{x \mid \varphi(x)\}$$
(так, чтобы это не приводило к парадоксам)
- Построение новых множеств с использованием теоретико-множественных операций:
$$X \cup Y, \quad X \cap Y, \quad X \setminus Y, \quad 2^X, \quad \ldots$$
- Сравнение множеств:
$$X = Y, X \subseteq Y, X \subset Y$$

Вступление

Какие возможности должна предоставлять аксиоматическая теория множеств?

- Проверка принадлежности элемента множеству:
$$x \in S$$
- Задание множества через свойство его элементов:
$$\{x \mid \varphi(x)\}$$
(*так, чтобы это не приводило к парадоксам*)
- Построение новых множеств с использованием теоретико-множественных операций:
$$X \cup Y, \quad X \cap Y, \quad X \setminus Y, \quad 2^X, \quad \ldots$$
- Сравнение множеств:
$$X = Y, X \subseteq Y, X \subset Y$$
- Сравнение мощностей множеств:
$$|X| = |Y|, |X| < |Y|$$

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория Цермело-Френкеля (ZF)

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория Цермело-Френкеля (ZF)
  - предполагаемая предметная область — в точности все множества

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория Цермело-Френкеля (ZF)
  - предполагаемая предметная область — в точности все множества
  - включает в себя аксиомы, позволяющие описывать "хорошие" множества, а также исключать из рассмотрения "плохие" множества

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория Цермело-Френкеля (ZF)
  - предполагаемая предметная область — в точности все множества
  - включает в себя аксиомы, позволяющие описывать "хорошие" множества, а также исключать из рассмотрения "плохие" множества
  - существуют непротиворечивые расширения этой теории, позволяющие описывать больше "хороших" и исключать больше "плохих" множеств

    (*например, ZFC: ZF + аксиома выбора*)

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория Цермело-Френкеля (ZF)
  - предполагаемая предметная область — в точности все множества
  - включает в себя аксиомы, позволяющие описывать "хорошие" множества, а также исключать из рассмотрения "плохие" множества
  - существуют непротиворечивые расширения этой теории, позволяющие описывать больше "хороших" и исключать больше "плохих" множеств

    (*например, ZFC: ZF + аксиома выбора*)
  - существуют схожие теории, как правило следующие из ZF: теория Цермело, общая теория множеств, теория Крипке-Платека, ...

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)
  - предполагаемая предметная область — множества, а также собственные классы: объекты, являющиеся совокупностями элементов, но не входящие в другие объекты в качестве элементов

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)
  - предполагаемая предметная область — множества, а также собственные классы: объекты, являющиеся совокупностями элементов, но не входящие в другие объекты в качестве элементов
  - истинность утверждений, не оперирующих понятием собственного класса, одинакова в ZFC и NBG

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)
  - предполагаемая предметная область — множества, а также собственные классы: объекты, являющиеся совокупностями элементов, но не входящие в другие объекты в качестве элементов
  - истинность утверждений, не оперирующих понятием собственного класса, одинакова в ZFC и NBG
  - некоторые “плохие” множества в этой теории являются собственными классами (*например, множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента*)

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)
  - предполагаемая предметная область — множества, а также собственные классы: объекты, являющиеся совокупностями элементов, но не входящие в другие объекты в качестве элементов
  - истинность утверждений, не оперирующих понятием собственного класса, одинакова в ZFC и NBG
  - некоторые "плохие" множества в этой теории являются собственными классами (*например, множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента*)
  - не все "плохие" множества являются классами (*например, нельзя задать множество всех множеств и класс всех классов*)

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)
  - существуют схожие теории, как правило позволяющие описать больше множеств и классов:
    теория Морза-Келли, теория Тарского-Гротендика, ...

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)
  - существуют схожие теории, как правило позволяющие описать больше множеств и классов:
    теория Морза-Келли, теория Тарского-Гротендика, ...

В любой адекватной системе аксиом теории множеств ограничивается свобода описания множеств

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)
  - существуют схожие теории, как правило позволяющие описать больше множеств и классов:
    теория Морза-Келли, теория Тарского-Гротендика, ...

В любой адекватной системе аксиом теории множеств ограничивается свобода описания множеств:

- требуется исключить все множества, наличие которых приводит к логическим противоречиям

Аксиоматические теории множеств

Существует немало (*в той или иной мере успешных*) попыток описать систему аксиом теории множеств, например:

- теория фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG)
  - существуют схожие теории, как правило позволяющие описать больше множеств и классов:
    теория Морза-Келли, теория Тарского-Гротендика, ...

В любой адекватной системе аксиом теории множеств ограничивается свобода описания множеств:

- требуется исключить все множества, наличие которых приводит к логическим противоречиям
- вместе с этими множествами могут быть исключены и некоторые “невинные” множества

Аксиоматические теории множеств

Аксиоматическую теорию множеств можно описать как

1. теорию с равенством в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$

Аксиоматические теории множеств

Аксиоматическую теорию множеств можно описать как

1. теорию с равенством в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$
2. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}, =^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, включающую аксиомы равенства

Аксиоматические теории множеств

Аксиоматическую теорию множеств можно описать как

1. теорию с равенством в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$
2. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}, =^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, включающую аксиомы равенства
3. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, в которой запись $\mathtt{x} = \mathtt{y}$ является сокращением для формулы
$$\forall \mathtt{z}\, ((\mathtt{z} \in \mathtt{x} \equiv \mathtt{z} \in \mathtt{y})\, \& (\mathtt{x} \in \mathtt{z} \equiv \mathtt{y} \in \mathtt{z}))$$

Аксиоматические теории множеств

Аксиоматическую теорию множеств можно описать как

1. теорию с равенством в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$
2. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}, =^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, включающую аксиомы равенства
3. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, в которой запись $x = y$ является сокращением для формулы
$$\forall z\, ((z \in x \equiv z \in y)\, \&(x \in z \equiv y \in z))$$

Для простоты будем придерживаться первого способа описания теории

Аксиоматические теории множеств

Аксиоматическую теорию множеств можно описать как

1. теорию с равенством в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$
2. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}, =^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, включающую аксиомы равенства
3. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, в которой запись $x = y$ является сокращением для формулы
$$\forall z\, ((z \in x \equiv z \in y)\, \&(x \in z \equiv y \in z))$$

Для простоты будем придерживаться первого способа описания теории

А как могут выглядеть аксиомы теории множеств?

Аксиоматические теории множеств

Аксиоматическую теорию множеств можно описать как

1. теорию с равенством в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$
2. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}, =^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, включающую аксиомы равенства
3. теорию в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\in^{(2)}\}, \emptyset \rangle$, в которой запись $x = y$ является сокращением для формулы
$$\forall z \, ((z \in x \equiv z \in y) \& (x \in z \equiv y \in z))$$

Для простоты будем придерживаться первого способа описания теории

А как могут выглядеть аксиомы теории множеств?

Для этого достаточно придумать набор свойств, как можно более точно описывающих понятие "множество"

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\ \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\ \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\ \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$
- $\mathtt{X} \cap \mathtt{Y} = \emptyset$: $\neg \exists \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\ \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$
- $\mathtt{X} \cap \mathtt{Y} = \emptyset$: $\neg \exists \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$
- $\emptyset \in \mathtt{X}$: $\exists \mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathtt{Y} = \emptyset)$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\ \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$
- $\mathtt{X} \cap \mathtt{Y} = \emptyset$: $\neg \exists \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$
- $\emptyset \in \mathtt{X}$: $\exists \mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{Y} = \emptyset)$
- $\mathtt{Y} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\}$: $\forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{x} \vee \mathtt{z} = \mathtt{x}))$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\ \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$
- $\mathtt{X} \cap \mathtt{Y} = \emptyset$: $\neg \exists \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$
- $\emptyset \in \mathtt{X}$: $\exists \mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{Y} = \emptyset)$
- $\mathtt{Y} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\}$: $\forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{x} \vee \mathtt{z} = \mathtt{x}))$
- $\mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\} \in \mathtt{Y}$: $\exists \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \,\&\, \mathtt{z} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\})$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\, \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$
- $\mathtt{X} \cap \mathtt{Y} = \emptyset$: $\neg \exists \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$
- $\emptyset \in \mathtt{X}$: $\exists \mathtt{Y}\, (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{Y} = \emptyset)$
- $\mathtt{Y} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\}$: $\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{x} \vee \mathtt{z} = \mathtt{x}))$
- $\mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\} \in \mathtt{Y}$: $\exists \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \,\&\, \mathtt{z} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\})$
- $\mathtt{X} \subseteq \mathtt{Y}$: $\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\, \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$
- $\mathtt{X} \cap \mathtt{Y} = \emptyset$: $\neg \exists \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$
- $\emptyset \in \mathtt{X}$: $\exists \mathtt{Y}\, (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{Y} = \emptyset)$
- $\mathtt{Y} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\}$: $\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{x} \vee \mathtt{z} = \mathtt{x}))$
- $\mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\} \in \mathtt{Y}$: $\exists \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \,\&\, \mathtt{z} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\})$
- $\mathtt{X} \subseteq \mathtt{Y}$: $\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$
- $\exists! \mathtt{x}\, \varphi$: $\exists \mathtt{x}\, \varphi \,\&\, \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, (\varphi \,\&\, \varphi\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\} \to \mathtt{x} = \mathtt{y})$

  (переменная $\mathtt{y}$ не входит в φ)

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $\mathtt{z} \notin \mathtt{X}$: $\neg \mathtt{z} \in \mathtt{X}$
- $\mathtt{X} = \emptyset$: $\forall \mathtt{z}\, \mathtt{z} \notin \mathtt{X}$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$
- $\mathtt{X} \cap \mathtt{Y} = \emptyset$: $\neg \exists \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$
- $\emptyset \in \mathtt{X}$: $\exists \mathtt{Y}\, (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{Y} = \emptyset)$
- $\mathtt{Y} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\}$: $\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{x} \vee \mathtt{z} = \mathtt{x}))$
- $\mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\} \in \mathtt{Y}$: $\exists \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \,\&\, \mathtt{z} = \mathtt{X} \cup \{\mathtt{X}\})$
- $\mathtt{X} \subseteq \mathtt{Y}$: $\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \in \mathtt{Y})$
- $\exists ! \mathtt{x}\, \varphi$: $\exists \mathtt{x}\, \varphi \,\&\, \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, (\varphi \,\&\, \varphi\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\} \to \mathtt{x} = \mathtt{y})$
  (переменная $\mathtt{y}$ не входит в φ)
- $\mathrm{Func}[\varphi(\mathtt{x}, \mathtt{y})]$: $\forall \mathtt{x}\, \exists ! \mathtt{y}\, \varphi(\mathtt{x}, \mathtt{y})$

Теория Цермело-Френкеля

Для удобочитаемости будем использовать такие сокращения:

- $z \notin X$: $\neg z \in X$
- $X = \emptyset$: $\forall z\, z \notin X$
- $t_1 \neq t_2$: $\neg t_1 = t_2$
- $X \cap Y = \emptyset$: $\neg \exists z\, (z \in X \,\&\, z \in Y)$
- $\emptyset \in X$: $\exists Y\, (Y \in X \,\&\, Y = \emptyset)$
- $Y = X \cup \{X\}$: $\forall z\, (z \in Y \equiv (z \in x \vee z = x))$
- $X \cup \{X\} \in Y$: $\exists z\, (z \in Y \,\&\, z = X \cup \{X\})$
- $X \subseteq Y$: $\forall z\, (z \in X \to z \in Y)$
- $\exists! x\, \varphi$: $\exists x\, \varphi \,\&\, \forall x\, \forall y\, (\varphi \,\&\, \varphi\{x/y\} \to x = y)$
  (переменная y не входит в φ)
- $\mathrm{Func}[\varphi(x, y)]$: $\forall x\, \exists! y\, \varphi(x, y)$
- $X \xrightarrow{\varphi(x,y)} Y$: $\forall z\, (z \in Y \equiv \exists u\, (u \in X \,\&\, \varphi\{x/u, y/z\}))$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объёмности: если множества X, Y состоят из одних и тех же элементов, то они равны

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объёмности: если множества $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ состоят из одних и тех же элементов, то они равны

$$A_=: \forall \mathtt{X}\, \forall \mathtt{Y}\, (\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \equiv \mathtt{z} \in \mathtt{Y}) \to \mathtt{X} = \mathtt{Y})$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объёмности: если множества $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ состоят из одних и тех же элементов, то они равны

$$A_{=}\colon\ \forall \mathtt{X}\, \forall \mathtt{Y}\, (\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \equiv \mathtt{z} \in \mathtt{Y}) \to \mathtt{X} = \mathtt{Y})$$

Аксиома объёмности вместе с аксиомами равенства — это естественное определение равенства множеств

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объёмности: если множества $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ состоят из одних и тех же элементов, то они равны

$$A_{=}\colon \forall \mathtt{X}\, \forall \mathtt{Y}\, (\forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \equiv \mathtt{z} \in \mathtt{Y}) \to \mathtt{X} = \mathtt{Y})$$

Аксиома объёмности вместе с аксиомами равенства — это естественное определение равенства множеств

Если использовать **только** аксиомы равенства, то допускается существование таких множеств:

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объёмности: если множества X, Y состоят из одних и тех же элементов, то они равны

$$A_=: \forall X\ \forall Y\ (\forall z\ (z \in X \equiv z \in Y) \to X = Y)$$

Аксиома объёмности вместе с аксиомами равенства — это естественное определение равенства множеств

Если использовать **только** аксиомы равенства, то допускается существование таких множеств:

- $X = \{z_1, z_2, \ldots\}$

X

$\boxed{z_1, z_2, \ldots}$

Теория Цермело-Френкеля

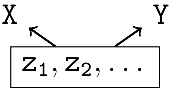
Аксиома объёмности: если множества X, Y состоят из одних и тех же элементов, то они равны

$$A_=: \forall X\, \forall Y\, (\forall z\, (z \in X \equiv z \in Y) \to X = Y)$$

Аксиома объёмности вместе с аксиомами равенства — это естественное определение равенства множеств

Если использовать **только** аксиомы равенства, то допускается существование таких множеств:

- $X = \{z_1, z_2, \dots\}$
- $Y = \{z_1, z_2, \dots\}$



Теория Цермело-Френкеля

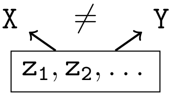
Аксиома объёмности: если множества X, Y состоят из одних и тех же элементов, то они равны

$$A_{=}:\ \forall X\ \forall Y\ (\forall z\ (z \in X \equiv z \in Y) \to X = Y)$$

Аксиома объёмности вместе с аксиомами равенства — это естественное определение равенства множеств

Если использовать **только** аксиомы равенства, то допускается существование таких множеств:

- $X = \{z_1, z_2, \dots\}$
- $Y = \{z_1, z_2, \dots\}$
- $X \neq Y$



Теория Цермело-Френкеля

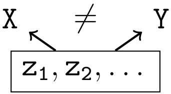
Аксиома объёмности: если множества X, Y состоят из одних и тех же элементов, то они равны

$$A_{=}: \forall X\, \forall Y\, (\forall z\, (z \in X \equiv z \in Y) \to X = Y)$$

Аксиома объёмности вместе с аксиомами равенства — это естественное определение равенства множеств

Если использовать **только** аксиомы равенства, то допускается существование таких множеств:

- $X = \{z_1, z_2, \ldots\}$
- $Y = \{z_1, z_2, \ldots\}$
- $X \neq Y$



Аксиомой объёмности гарантируется **единственность** множества X, если принадлежность элементов этому множеству задана однозначно

Теория Цермело-Френкеля

Схема выделения: если определены множество $\mathtt{X}$ и свойство φ элементов этого множества, то можно определить множество $\mathtt{Y} = \{\mathtt{z} \mid \mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$

Теория Цермело-Френкеля

Схема выделения: если определены множество $\mathtt{X}$ и свойство φ элементов этого множества, то можно определить множество $\mathtt{Y} = \{\mathtt{z} \mid \mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$

$$\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi)\colon \forall \widetilde{\mathtt{u}}^{\mathtt{n}}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi(\mathtt{z}, \widetilde{\mathtt{u}}^{\mathtt{n}})))$$

Теория Цермело-Френкеля

Схема выделения: если определены множество $\mathtt{X}$ и свойство φ элементов этого множества, то можно определить множество $\mathtt{Y} = \{\mathtt{z} \mid \mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$

$$\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi)\colon \forall\widetilde{\mathtt{u}^{\mathtt{n}}}\ \forall\mathtt{X}\ \exists\mathtt{Y}\ \forall\mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi(\mathtt{z}, \widetilde{\mathtt{u}^{\mathtt{n}}})))$$

Важная особенность схемы $\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi)$: с помощью этой схемы можно определить только подмножество $\mathtt{Y}$ множества $\mathtt{X}$, определённого ранее

Теория Цермело-Френкеля

Схема выделения: если определены множество $\mathtt{X}$ и свойство φ элементов этого множества, то можно определить множество $\mathtt{Y} = \{\mathtt{z} \mid \mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$

$$\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi)\colon \forall \widetilde{\mathtt{u}}^{\mathtt{n}}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi(\mathtt{z}, \widetilde{\mathtt{u}}^{\mathtt{n}})))$$

Важная особенность схемы $\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi)$: с помощью этой схемы можно определить только подмножество $\mathtt{Y}$ множества $\mathtt{X}$, определённого ранее

Это означает, что невозможно взять “из ниоткуда” плохое множество, такое как множество всех множеств

Теория Цермело-Френкеля

Схема выделения: если определены множество $\mathtt{X}$ и свойство φ элементов этого множества, то можно определить множество $\mathtt{Y} = \{\mathtt{z} \mid \mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$

$$\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi)\text{: } \forall \widetilde{\mathtt{u}}^{\mathtt{n}}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi(\mathtt{z}, \widetilde{\mathtt{u}}^{\mathtt{n}})))$$

Важная особенность схемы $\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi)$: с помощью этой схемы можно определить только подмножество $\mathtt{Y}$ множества $\mathtt{X}$, определённого ранее

Это означает, что невозможно взять “из ниоткуда” плохое множество, такое как множество всех множеств

Какие интересные факты можно обосновать, используя только аксиомы объёмности и выделения?

Теория Цермело-Френкеля

Например:

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственное пересечение

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \cap \mathtt{Y}$$

Теория Цермело-Френкеля

Например:

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственное пересечение

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \cap \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

Теория Цермело-Френкеля

Например:

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственное пересечение

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \cap \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

$$\forall \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathsf{e} \in \mathtt{Y}))$$

Теория Цермело-Френкеля

Например:

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственное пересечение

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \cap \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

$$\forall \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathsf{e} \in \mathtt{Y}))$$

Единственность гарантируется аксиомой объёмности

Теория Цермело-Френкеля

Например:

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственное пересечение

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \cap \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

$$\forall \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathsf{e} \in \mathtt{Y}))$$

Единственность гарантируется аксиомой объёмности

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственная разность

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \setminus \mathtt{Y}$$

Теория Цермело-Френкеля

Например:

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственное пересечение

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \cap \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

$$\forall \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X} \mathbin{\&} \mathsf{e} \in \mathtt{Y}))$$

Единственность гарантируется аксиомой объёмности

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственная разность

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \setminus \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

Теория Цермело-Френкеля

Например:

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственное пересечение

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \cap \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

$$\forall \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathsf{e} \in \mathtt{Y}))$$

Единственность гарантируется аксиомой объёмности

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственная разность

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \setminus \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

$$\forall \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathsf{e} \notin \mathtt{Y}))$$

Теория Цермело-Френкеля

Например:

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственное пересечение

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \cap \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

$$\forall \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathsf{e} \in \mathtt{Y}))$$

Единственность гарантируется аксиомой объёмности

Для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует единственная разность

$$\mathtt{Z} = \mathtt{X} \setminus \mathtt{Y}$$

Существование гарантируется аксиомой выделения

$$\forall \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathsf{e} \notin \mathtt{Y}))$$

Единственность гарантируется аксиомой объёмности

Теория Цермело-Френкеля

А можно ли с использованием только схемы выделения доказать существование какого-нибудь конкретного множества?

Теория Цермело-Френкеля

А можно ли с использованием только схемы выделения доказать существование какого-нибудь конкретного множества?

Например, можно попытаться доказать существование пустого множества $\mathtt{Y}$, используя аксиому выделения

$$\forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X}\ \&\ \neg \mathsf{e} = \mathsf{e}))$$

Теория Цермело-Френкеля

А можно ли с использованием только схемы выделения доказать существование какого-нибудь конкретного множества?

Например, можно попытаться доказать существование пустого множества $\mathtt{Y}$, используя аксиому выделения

$$\forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall e\ (e \in \mathtt{Y} \equiv (e \in \mathtt{X}\ \&\ \neg e = e))$$

Но откуда взять множество $\mathtt{X}$, тривиальным подмножеством которого является $\mathtt{Y}$?

Теория Цермело-Френкеля

А можно ли с использованием только схемы выделения доказать существование какого-нибудь конкретного множества?

Например, можно попытаться доказать существование пустого множества $\mathtt{Y}$, используя аксиому выделения

$$\forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathsf{e}\ (\mathsf{e} \in \mathtt{Y} \equiv (\mathsf{e} \in \mathtt{X}\ \&\ \neg \mathsf{e} = \mathsf{e}))$$

Но откуда взять множество $\mathtt{X}$, тривиальным подмножеством которого является $\mathtt{Y}$?

Разумнее будет поступить наоборот: явно сказать, что пустое множество существует, и на основе пустого множества построить все остальные множества

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пустого множества: существует пустое множество $\emptyset$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пустого множества: существует пустое множество $\emptyset$

$$\mathrm{A}\emptyset\colon\ \exists \mathtt{X}\ \mathtt{X} = \emptyset$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пустого множества: существует пустое множество $\emptyset$

$$\mathsf{A}\emptyset\colon \exists \mathtt{X}\ \mathtt{X} = \emptyset$$

А можно ли на основании аксиом объёмности и пустого множества и схемы выделения сделать вывод, что существует хотя бы одно непустое множество?

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пустого множества: существует пустое множество $\emptyset$

$$\mathrm{A}\emptyset\colon \exists \mathtt{X}\ \mathtt{X} = \emptyset$$

А можно ли на основании аксиом объёмности и пустого множества и схемы выделения сделать вывод, что существует хотя бы одно непустое множество?

- аксиома $\mathrm{A}\emptyset$ гарантирует существование пустого множества

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пустого множества: существует пустое множество $\emptyset$

$$\mathrm{A}\emptyset\colon \exists \mathtt{X}\ \mathtt{X} = \emptyset$$

А можно ли на основании аксиом объёмности и пустого множества и схемы выделения сделать вывод, что существует хотя бы одно непустое множество?

- аксиома $\mathrm{A}\emptyset$ гарантирует существование пустого множества
- схема $\mathrm{A}\subseteq(\varphi)$ позволяет описывать подмножества заданных множеств

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пустого множества: существует пустое множество $\emptyset$

$$A\emptyset\colon \exists \mathtt{X}\ \mathtt{X} = \emptyset$$

А можно ли на основании аксиом объёмности и пустого множества и схемы выделения сделать вывод, что существует хотя бы одно непустое множество?

- аксиома $A\emptyset$ гарантирует существование пустого множества
- схема $A\subseteq(\varphi)$ позволяет описывать подмножества заданных множеств, то есть **не позволяет определить непустое множество на основе пустого**

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пустого множества: существует пустое множество $\emptyset$

$$\mathsf{A}\emptyset\colon \exists \mathtt{X}\ \mathtt{X} = \emptyset$$

А можно ли на основании аксиом объёмности и пустого множества и схемы выделения сделать вывод, что существует хотя бы одно непустое множество?

- аксиома $\mathsf{A}\emptyset$ гарантирует существование пустого множества
- схема $\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi)$ позволяет описывать подмножества заданных множеств, то есть **не позволяет определить непустое множество на основе пустого**
- аксиома $\mathsf{A}{=}$ **не позволяет определять новые множества**

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пустого множества: существует пустое множество $\emptyset$

$$\mathrm{A}\emptyset\colon \exists \mathtt{X}\ \mathtt{X} = \emptyset$$

А можно ли на основании аксиом объёмности и пустого множества и схемы выделения сделать вывод, что существует хотя бы одно непустое множество?

- аксиома $\mathrm{A}\emptyset$ гарантирует существование пустого множества
- схема $\mathrm{A}{\subseteq}(\varphi)$ позволяет описывать подмножества заданных множеств, то есть **не позволяет определить непустое множество на основе пустого**
- аксиома $\mathrm{A}{=}$ **не позволяет определять новые множества**

Значит, разумно иметь аксиомы, позволяющие явно задавать непустые множества на основе пустого

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пары: для любой пары множеств $\mathtt{u}$, $\mathtt{v}$ существует множество $\{\mathtt{u}, \mathtt{v}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пары: для любой пары множеств $\mathtt{u}$, $\mathtt{v}$ существует множество $\{\mathtt{u}, \mathtt{v}\}$

$$\text{A2}: \forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ \exists \mathtt{Z}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathtt{u} \in \mathtt{Z} \equiv (\mathtt{u} = \mathtt{x} \vee \mathtt{u} = \mathtt{y}))$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пары: для любой пары множеств u, v существует множество $\{u, v\}$

$$A2: \forall x \, \forall y \, \exists Z \, \forall u \, (u \in Z \equiv (u = x \vee u = y))$$

На основании аксиом $A\emptyset$, A2 можно утверждать, что существуют, например, такие множества из одного или двух элементов:

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пары: для любой пары множеств u, v существует множество $\{u, v\}$

$$A2: \forall x \, \forall y \, \exists Z \, \forall u \, (u \in Z \equiv (u = x \vee u = y))$$

На основании аксиом $A\emptyset$, A2 можно утверждать, что существуют, например, такие множества из одного или двух элементов:

- $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пары: для любой пары множеств u, v существует множество $\{u, v\}$

$$A2:\ \forall x\ \forall y\ \exists Z\ \forall u\ (u \in Z \equiv (u = x \vee u = y))$$

На основании аксиом $A\emptyset$, $A2$ можно утверждать, что существуют, например, такие множества из одного или двух элементов:

- $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$
- $\{\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пары: для любой пары множеств u, v существует множество $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$

$$\text{A2}: \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \exists \mathrm{Z}\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{u} \in \mathrm{Z} \equiv (\mathrm{u} = \mathrm{x} \vee \mathrm{u} = \mathrm{y}))$$

На основании аксиом A$\emptyset$, A2 можно утверждать, что существуют, например, такие множества из одного или двух элементов:

- $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$
- $\{\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$
- $\{\{\{\emptyset\}\}\} = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пары: для любой пары множеств u, v существует множество $\{u, v\}$

$$A2\colon \forall x\, \forall y\, \exists Z\, \forall u\, (u \in Z \equiv (u = x \vee u = y))$$

На основании аксиом $A\emptyset$, $A2$ можно утверждать, что существуют, например, такие множества из одного или двух элементов:

- $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$
- $\{\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$
- $\{\{\{\emptyset\}\}\} = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома пары: для любой пары множеств $\mathtt{u}$, $\mathtt{v}$ существует множество $\{\mathtt{u}, \mathtt{v}\}$

$$A2: \forall x \; \forall y \; \exists Z \; \forall u \; (u \in Z \equiv (u = x \vee u = y))$$

На основании аксиом $A\emptyset$, A2 можно утверждать, что существуют, например, такие множества из одного или двух элементов:

- $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$
- $\{\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$
- $\{\{\{\emptyset\}\}\} = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств X существует объединение $\cup X$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств $\mathtt{X}$ существует объединение $\cup\mathtt{X}$

$$\mathrm{A}\cup\text{: } \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathtt{u} \in \mathtt{Y} \equiv \exists \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathtt{u} \in \mathtt{z}))$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств $\mathtt{X}$ существует объединение $\cup\mathtt{X}$

$$\mathrm{A}\cup\colon \forall \mathtt{X}\, \exists \mathtt{Y}\, \forall \mathtt{u}\, (\mathtt{u} \in \mathtt{Y} \equiv \exists \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{u} \in \mathtt{z}))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств $\mathtt{X}$ существует объединение $\cup\mathtt{X}$

$$\mathrm{A}\cup\text{: } \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathtt{u} \in \mathtt{Y} \equiv \exists \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X}\ \&\ \mathtt{u} \in \mathtt{z}))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $\mathtt{X} \cup \mathtt{Y}$ для заданных множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств $\mathtt{X}$ существует объединение $\cup\mathtt{X}$

$$\mathsf{A}\cup:\ \forall\mathtt{X}\ \exists\mathtt{Y}\ \forall\mathtt{u}\ (\mathtt{u}\in\mathtt{Y}\equiv\exists\mathtt{z}\ (\mathtt{z}\in\mathtt{X}\ \&\ \mathtt{u}\in\mathtt{z}))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $\mathtt{X}\cup\mathtt{Y}$ для заданных множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$
  - аксиома пары: существует множество $\{\mathtt{X},\mathtt{Y}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств X существует объединение $\cup X$

$$A\cup: \forall X\ \exists Y\ \forall u\ (u \in Y \equiv \exists z\ (z \in X \,\&\, u \in z))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $X \cup Y$ для заданных множеств X, Y
  - аксиома пары: существует множество $\{X, Y\}$
  - аксиома объединения: существует множество $X \cup Y = \cup\{X, Y\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств X существует объединение $\cup X$

$$A\cup: \forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \equiv \exists z\, (z \in X \,\&\, u \in z))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $X \cup Y$ для заданных множеств X, Y
  - аксиома пары: существует множество $\{X, Y\}$
  - аксиома объединения: существует множество $X \cup Y = \cup \{X, Y\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств X существует объединение $\cup X$

$$A\cup:\ \forall X\ \exists Y\ \forall u\ (u \in Y \equiv \exists z\ (z \in X\ \&\ u \in z))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $X \cup Y$ для заданных множеств X, Y
  - аксиома пары: существует множество $\{X, Y\}$
  - аксиома объединения: существует множество $X \cup Y = \cup\{X, Y\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств X существует объединение $\cup X$

$$A\cup:\ \forall X\ \exists Y\ \forall u\ (u \in Y \equiv \exists z\ (z \in X \,\&\, u \in z))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $X \cup Y$ для заданных множеств X, Y
  - аксиома пары: существует множество $\{X, Y\}$
  - аксиома объединения: существует множество $X \cup Y = \cup\{X, Y\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств X существует объединение $\cup X$

$$A\cup:\ \forall X\ \exists Y\ \forall u\ (u \in Y \equiv \exists z\ (z \in X \,\&\, u \in z))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $X \cup Y$ для заданных множеств X, Y
  - аксиома пары: существует множество $\{X, Y\}$
  - аксиома объединения: существует множество $X \cup Y = \cup\{X, Y\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств X существует объединение $\cup X$

$$A\cup:\ \forall X\ \exists Y\ \forall u\ (u \in Y \equiv \exists z\ (z \in X \,\&\, u \in z))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $X \cup Y$ для заданных множеств X, Y
  - аксиома пары: существует множество $\{X, Y\}$
  - аксиома объединения: существует множество $X \cup Y = \cup\{X, Y\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
  - аксиома пары: множество $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ существует

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома объединения: для любого семейства множеств X существует объединение $\cup X$

$$A\cup\colon \forall X\ \exists Y\ \forall u\ (u \in Y \equiv \exists z\ (z \in X \,\&\, u \in z))$$

Теперь можно утверждать, что существуют, например, такие конечные множества:

- $X \cup Y$ для заданных множеств X, Y
  - аксиома пары: существует множество $\{X, Y\}$
  - аксиома объединения: существует множество $X \cup Y = \cup\{X, Y\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
  - аксиома пары: множество $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ существует

А как определять бесконечные множества?

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

$$\mathrm{A}\mathbb{N}_0\text{: } \exists \mathtt{X}\, (\emptyset \in \mathtt{X} \,\&\, \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \cup \{\mathtt{z}\} \in \mathtt{X}))$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

$$\mathrm{A}\mathbb{N}_0\colon \exists \mathtt{X}\ (\emptyset \in \mathtt{X}\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \cup \{\mathtt{z}\} \in \mathtt{X}))$$

Как выглядит множество $\mathtt{X}$, определяемое аксиомой $\mathrm{A}\mathbb{N}_0$?

$$S[\mathbb{N}_0] = \left\{ \quad , \quad , \quad , \quad , \dots \right\}$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

$$\mathrm{A}\mathbb{N}_0\colon \exists \mathtt{X}\ (\emptyset \in \mathtt{X} \,\&\, \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \cup \{\mathtt{z}\} \in \mathtt{X}))$$

Как выглядит множество $\mathtt{X}$, определяемое аксиомой $\mathrm{A}\mathbb{N}_0$?

$$S[\mathbb{N}_0] = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{S[0]}, \qquad , \qquad\qquad , \qquad\qquad\qquad , \ldots \right\}$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

$$A\mathbb{N}_0\colon \exists \mathtt{X}\ (\emptyset \in \mathtt{X}\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \cup \{\mathtt{z}\} \in \mathtt{X}))$$

Как выглядит множество $\mathtt{X}$, определяемое аксиомой $A\mathbb{N}_0$?

$$S[\mathbb{N}_0] = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{S[0]}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{S[1]}, \qquad , \qquad , \ldots \right\}$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

$$\mathrm{A}\mathbb{N}_0\colon \exists \mathtt{X}\ (\emptyset \in \mathtt{X} \,\&\, \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \cup \{\mathtt{z}\} \in \mathtt{X}))$$

Как выглядит множество $\mathtt{X}$, определяемое аксиомой $\mathrm{A}\mathbb{N}_0$?

$$S[\mathbb{N}_0] = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{S[0]}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{S[1]}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{S[2]}, \qquad\qquad , \ldots \right\}$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

$$\mathrm{A}\mathbb{N}_0\colon \exists \mathtt{X}\ (\emptyset \in \mathtt{X} \mathbin{\&} \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \cup \{\mathtt{z}\} \in \mathtt{X}))$$

Как выглядит множество $\mathtt{X}$, определяемое аксиомой $\mathrm{A}\mathbb{N}_0$?

$$S[\mathbb{N}_0] = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{S[0]}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{S[1]}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{S[2]}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}_{S[3]}, \ldots \right\}$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

$$\mathrm{A}\mathbb{N}_0\colon \exists \mathtt{X}\ (\emptyset \in \mathtt{X}\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \cup \{\mathtt{z}\} \in \mathtt{X}))$$

Как выглядит множество $\mathtt{X}$, определяемое аксиомой $\mathrm{A}\mathbb{N}_0$?

$$S[\mathbb{N}_0] = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{S[0]}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{S[1]}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{S[2]}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}_{S[3]}, \ldots \right\}$$

А откуда взять множества большей мощности?

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома бесконечности: существует множество (*теоретико-множественных представлений*) натуральных чисел

$$\mathrm{A}\mathbb{N}_0\colon\ \exists \mathtt{X}\ (\emptyset \in \mathtt{X}\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathtt{z} \cup \{\mathtt{z}\} \in \mathtt{X}))$$

Как выглядит множество $\mathtt{X}$, определяемое аксиомой $\mathrm{A}\mathbb{N}_0$?

$$S[\mathbb{N}_0] = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{S[0]},\ \underbrace{\{\emptyset\}}_{S[1]},\ \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{S[2]},\ \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}_{S[3]}, \ldots \right\}$$

А откуда взять множества большей мощности?

(*кроме аксиомы объединения*)

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома степени: для любого множества $\mathtt{X}$ существует его степень $\mathtt{Y} = 2^{\mathtt{X}}$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома степени: для любого множества $\mathtt{X}$ существует его степень $\mathtt{Y} = 2^{\mathtt{X}}$

$$AP\colon \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv \mathtt{z} \subseteq \mathtt{X})$$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома степени: для любого множества $\mathtt{X}$ существует его степень $\mathtt{Y} = 2^{\mathtt{X}}$

$$AP\colon \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv \mathtt{z} \subseteq \mathtt{X})$$

Теперь мы можем определить множество мощности

- континуум $(2^{S[\mathbb{N}_0]})$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома степени: для любого множества $\mathtt{X}$ существует его степень $\mathtt{Y} = 2^{\mathtt{X}}$

$$AP\colon \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv \mathtt{z} \subseteq \mathtt{X})$$

Теперь мы можем определить множество мощности

- континуум $(2^{S[\mathbb{N}_0]})$
- гиперконтинуум $(2^{2^{S[\mathbb{N}_0]}})$

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома степени: для любого множества $\mathtt{X}$ существует его степень $\mathtt{Y} = 2^{\mathtt{X}}$

$$AP\colon \forall \mathtt{X}\, \exists \mathtt{Y}\, \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv \mathtt{z} \subseteq \mathtt{X})$$

Теперь мы можем определить множество мощности

- континуум $(2^{S[\mathbb{N}_0]})$
- гиперконтинуум $(2^{2^{S[\mathbb{N}_0]}})$
- гипергиперконтинуум $(2^{2^{2^{S[\mathbb{N}_0]}}})$
- ...

Теория Цермело-Френкеля

Аксиома степени: для любого множества $\mathtt{X}$ существует его степень $\mathtt{Y} = 2^{\mathtt{X}}$

$$AP: \forall \mathtt{X}\, \exists \mathtt{Y}\, \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{Y} \equiv \mathtt{z} \subseteq \mathtt{X})$$

Теперь мы можем определить множество мощности

- континуум $(2^{S[\mathbb{N}_0]})$
- гиперконтинуум $(2^{2^{S[\mathbb{N}_0]}})$
- гипергиперконтинуум $(2^{2^{2^{S[\mathbb{N}_0]}}})$
- ...

А как определить множество заданной мощности, не получающееся из $S[\mathbb{N}_0]$ операцией степени?

Теория Цермело-Френкеля

Схема преобразования: применив к каждому элементу множества X преобразование φ, можно получить новое множество Y

Теория Цермело-Френкеля

Схема преобразования: применив к каждому элементу множества $\mathtt{X}$ преобразование φ, можно получить новое множество $\mathtt{Y}$

$$\mathsf{A}{\to}(\varphi)\colon \mathrm{Func}[\varphi(\mathtt{x},\mathtt{y})] \to \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \mathtt{X} \xrightarrow{\varphi} \mathtt{Y}$$

Теория Цермело-Френкеля

Схема преобразования: применив к каждому элементу множества $\mathtt{X}$ преобразование φ, можно получить новое множество $\mathtt{Y}$

$$\mathsf{A}{\rightarrow}(\varphi)\text{: } \mathrm{Func}[\varphi(\mathtt{x}, \mathtt{y})] \to \forall\mathtt{X}\ \exists\mathtt{Y}\ \mathtt{X} \xrightarrow{\varphi} \mathtt{Y}$$

Теперь можно определить, например, такое множество:

$$\{\{\emptyset, S[0]\}, \{\emptyset, S[1]\}, \{\emptyset, S[2]\}, \{\emptyset, S[3]\}, \ldots\}$$

Теория Цермело-Френкеля

Схема преобразования: применив к каждому элементу множества $\mathtt{X}$ преобразование φ, можно получить новое множество $\mathtt{Y}$

$$\mathsf{A}{\to}(\varphi)\text{: } \mathrm{Func}[\varphi(\mathtt{x},\mathtt{y})] \to \forall \mathtt{X}\ \exists \mathtt{Y}\ \mathtt{X} \overset{\varphi}{\to} \mathtt{Y}$$

Теперь можно определить, например, такое множество:

$$\{\{\emptyset, S[0]\}, \{\emptyset, S[1]\}, \{\emptyset, S[2]\}, \{\emptyset, S[3]\}, \ldots\}$$

Для этого достаточно применить схему преобразования к множеству $S[\mathbb{N}_0]$, использовав такую формулу $\varphi(\mathtt{x},\mathtt{y})$:

$$\forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{y} \equiv (\mathtt{z} = \emptyset \lor \mathtt{z} = \mathtt{x}))$$

Теория Цермело-Френкеля

Насколько адекватно описанные аксиомы и схемы аксиом определяют понятие “множества”?

Теория Цермело-Френкеля

Насколько адекватно описанные аксиомы и схемы аксиом определяют понятие "множества"?

Совокупность описанных аксиом теории множеств предоставляет все основные возможности работы с множествами

Теория Цермело-Френкеля

Насколько адекватно описанные аксиомы и схемы аксиом определяют понятие “множества”?

Совокупность описанных аксиом теории множеств предоставляет все основные возможности работы с множествами:

- проверка принадлежности элементов множеству (предоставляется сигнатурой)

Теория Цермело-Френкеля

Насколько адекватно описанные аксиомы и схемы аксиом определяют понятие “множества”?

Совокупность описанных аксиом теории множеств предоставляет все основные возможности работы с множествами:

- проверка принадлежности элементов множеству (предоставляется сигнатурой)
- задание множества через свойство его элементов (аксиома выделения)

Теория Цермело-Френкеля

Насколько адекватно описанные аксиомы и схемы аксиом определяют понятие “множества”?

Совокупность описанных аксиом теории множеств предоставляет все основные возможности работы с множествами:

- проверка принадлежности элементов множеству (предоставляется сигнатурой)
- задание множества через свойство его элементов (аксиома выделения)
- задание множеств через теоретико-множественные операции (аксиома выделения, аксиомы пары и объединения, аксиома степени)

Теория Цермело-Френкеля

Насколько адекватно описанные аксиомы и схемы аксиом определяют понятие "множества"?

Совокупность описанных аксиом теории множеств предоставляет все основные возможности работы с множествами:

- проверка принадлежности элементов множеству (предоставляется сигнатурой)
- задание множества через свойство его элементов (аксиома выделения)
- задание множеств через теоретико-множественные операции (аксиома выделения, аксиомы пары и объединения, аксиома степени)
- сравнение множеств (предоставляется синтаксисом логики предикатов)

Теория Цермело-Френкеля

Насколько адекватно описанные аксиомы и схемы аксиом определяют понятие “множества”?

Совокупность описанных аксиом теории множеств предоставляет все основные возможности работы с множествами:

- проверка принадлежности элементов множеству (предоставляется сигнатурой)
- задание множества через свойство его элементов (аксиома выделения)
- задание множеств через теоретико-множественные операции (аксиома выделения, аксиомы пары и объединения, аксиома степени)
- сравнение множеств (предоставляется синтаксисом логики предикатов)
- сравнение мощностей множеств (при описании множества через схему преобразования)

Теория Цермело-Френкеля

Тем не менее, описанные аксиомы неадекватны: ни одна из аксиом не запрещает наличие "парадоксальных" множеств, таких как множество всех множеств

Теория Цермело-Френкеля

Тем не менее, описанные аксиомы неадекватны: ни одна из аксиом не запрещает наличие "парадоксальных" множеств, таких как множество всех множеств

Значит, разумно иметь аксиому, запрещающую такие множества

Теория Цермело-Френкеля

Тем не менее, описанные аксиомы неадекватны: ни одна из аксиом не запрещает наличие "парадоксальных" множеств, таких как множество всех множеств

Значит, разумно иметь аксиому, запрещающую такие множества

Аксиома регулярности (фундирования): во всяком непустом множестве X содержится "наименьший" по включению элемент y

Теория Цермело-Френкеля

Тем не менее, описанные аксиомы неадекватны: ни одна из аксиом не запрещает наличие “парадоксальных” множеств, таких как множество всех множеств

Значит, разумно иметь аксиому, запрещающую такие множества

Аксиома регулярности (фундирования): во всяком непустом множестве $\mathtt{X}$ содержится “наименьший” по включению элемент $\mathtt{y}$

$$\mathsf{A}\!\downarrow\!: \forall \mathtt{X}\ (\mathtt{X} \neq \emptyset \to \exists \mathtt{y}\ (\mathtt{y} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{X} \cap \mathtt{y} = \emptyset))$$

Теория Цермело-Френкеля

Тем не менее, описанные аксиомы неадекватны: ни одна из аксиом не запрещает наличие “парадоксальных” множеств, таких как множество всех множеств

Значит, разумно иметь аксиому, запрещающую такие множества

Аксиома регулярности (фундирования): во всяком непустом множестве $\mathtt{X}$ содержится “наименьший” по включению элемент $\mathtt{y}$

$$A{\downarrow}: \forall \mathtt{X}\, (\mathtt{X} \neq \emptyset \to \exists \mathtt{y}\, (\mathtt{y} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{X} \cap \mathtt{y} = \emptyset))$$

А каким образом эта аксиома исключает парадоксальные множества?

Теория Цермело-Френкеля

Тем не менее, описанные аксиомы неадекватны: ни одна из аксиом не запрещает наличие "парадоксальных" множеств, таких как множество всех множеств

Значит, разумно иметь аксиому, запрещающую такие множества

Аксиома регулярности (фундирования): во всяком непустом множестве X содержится "наименьший" по включению элемент y

$$A\downarrow: \forall X\,(X \neq \emptyset \to \exists y\,(y \in X \,\&\, X \cap y = \emptyset))$$

А каким образом эта аксиома исключает парадоксальные множества?

Чтобы это понять, сформулируем отрицание аксиомы регулярности

Теория Цермело-Френкеля

Тем не менее, описанные аксиомы неадекватны: ни одна из аксиом не запрещает наличие “парадоксальных” множеств, таких как множество всех множеств

Значит, разумно иметь аксиому, запрещающую такие множества

Аксиома регулярности (фундирования): во всяком непустом множестве $\mathtt{X}$ содержится “наименьший” по включению элемент $\mathtt{y}$

$$\mathsf{A}{\downarrow}\colon \forall \mathtt{X}\,(\mathtt{X} \neq \emptyset \to \exists \mathtt{y}\,(\mathtt{y} \in \mathtt{X} \,\&\, \mathtt{X} \cap \mathtt{y} = \emptyset))$$

А каким образом эта аксиома исключает парадоксальные множества?

Чтобы это понять, сформулируем отрицание аксиомы регулярности:

найдётся непустое множество $\mathtt{X}$, *такое что*
для любого его элемента $\mathtt{y}$ *верно* $\mathtt{X} \cap \mathtt{y} \neq \emptyset$

Теория Цермело-Френкеля

Найдётся непустое множество $\mathtt{X}$, *такое что*
для любого его элемента $\mathtt{y}$ *верно* $\mathtt{X} \cap \mathtt{y} \neq \emptyset$

Рассмотрим произвольный элемент $\mathtt{x}_1$ множества $\mathtt{X}$

Теория Цермело-Френкеля

Найдётся непустое множество $\mathtt{X}$*, такое что*
для любого его элемента $\mathtt{y}$ *верно* $\mathtt{X} \cap \mathtt{y} \neq \emptyset$

Рассмотрим произвольный элемент $\mathtt{x}_1$ множества $\mathtt{X}$

Тогда $\mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X} \neq \emptyset$

Теория Цермело-Френкеля

Найдётся непустое множество $\mathtt{X}$*, такое что*
для любого его элемента $\mathtt{y}$ *верно* $\mathtt{X} \cap \mathtt{y} \neq \emptyset$

Рассмотрим произвольный элемент $\mathtt{x}_1$ множества $\mathtt{X}$

Тогда $\mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X} \neq \emptyset$

Выберем множество $\mathtt{x}_2$, такое что $\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X}$

Теория Цермело-Френкеля

Найдётся непустое множество $\mathtt{X}$, *такое что*
для любого его элемента $\mathtt{y}$ *верно* $\mathtt{X} \cap \mathtt{y} \neq \emptyset$

Рассмотрим произвольный элемент $\mathtt{x}_1$ множества $\mathtt{X}$

Тогда $\mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X} \neq \emptyset$

Выберем множество $\mathtt{x}_2$, такое что $\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X}$

Тогда $\mathtt{x}_2 \cap \mathtt{X} \neq \emptyset$

Теория Цермело-Френкеля

Найдётся непустое множество $\mathtt{X}$*, такое что*
для любого его элемента $\mathtt{y}$ *верно* $\mathtt{X} \cap \mathtt{y} \neq \emptyset$

Рассмотрим произвольный элемент $\mathtt{x}_1$ множества $\mathtt{X}$

Тогда $\mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X} \neq \emptyset$

Выберем множество $\mathtt{x}_2$, такое что $\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X}$

Тогда $\mathtt{x}_2 \cap \mathtt{X} \neq \emptyset$

...

В итоге получим последовательность множеств $\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots,$ такую что

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

Теория Цермело-Френкеля

Найдётся непустое множество $\mathtt{X}$, *такое что*
для любого его элемента $\mathtt{y}$ *верно* $\mathtt{X} \cap \mathtt{y} \neq \emptyset$

Рассмотрим произвольный элемент $\mathtt{x}_1$ множества $\mathtt{X}$

Тогда $\mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X} \neq \emptyset$

Выберем множество $\mathtt{x}_2$, такое что $\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1 \cap \mathtt{X}$

Тогда $\mathtt{x}_2 \cap \mathtt{X} \neq \emptyset$

...

В итоге получим последовательность множеств $\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots,$ такую что

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

Аксиома регулярности утверждает, что такой последовательности множеств **не существует**

Теория Цермело-Френкеля

$$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots \text{ — последовательность множеств}$$

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

И как же отсутствие такой последовательности спасает от парадоксов?

Теория Цермело-Френкеля

$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$ — последовательность множеств

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

И как же отсутствие такой последовательности спасает от парадоксов?

Рассмотрим, например, множество всех множеств Ω

Теория Цермело-Френкеля

$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$ — последовательность множеств

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

И как же отсутствие такой последовательности спасает от парадоксов?

Рассмотрим, например, множество всех множеств Ω

Для него верно соотношение $\Omega \in \Omega$

Теория Цермело-Френкеля

$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$ — последовательность множеств

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

И как же отсутствие такой последовательности спасает от парадоксов?

Рассмотрим, например, множество всех множеств Ω

Для него верно соотношение $\Omega \in \Omega$

Тогда можно выписать такую последовательность включений:

$$\Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \ldots$$

Теория Цермело-Френкеля

$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$ — последовательность множеств

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

И как же отсутствие такой последовательности спасает от парадоксов?

Рассмотрим, например, множество всех множеств Ω

Для него верно соотношение $\Omega \in \Omega$

Тогда можно выписать такую последовательность включений:

$$\Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \ldots$$

Эта последовательность запрещена аксиомой выделения

Теория Цермело-Френкеля

$$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$$ — последовательность множеств

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

И как же отсутствие такой последовательности спасает от парадоксов?

Рассмотрим, например, множество всех множеств Ω

Для него верно соотношение $\Omega \in \Omega$

Тогда можно выписать такую последовательность включений:

$$\Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \ldots$$

Эта последовательность запрещена аксиомой выделения

Значит, какой бы ни была модель для теории, включающей в себя все описанные ранее аксиомы, множество всех множеств не входит в эту модель

Теория Цермело-Френкеля

$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$ — последовательность множеств

$$\mathtt{x}_2 \in \mathtt{x}_1, \quad \mathtt{x}_3 \in \mathtt{x}_2, \quad \mathtt{x}_4 \in \mathtt{x}_3, \quad \ldots$$

И как же отсутствие такой последовательности спасает от парадоксов?

Рассмотрим, например, множество всех множеств Ω

Для него верно соотношение $\Omega \in \Omega$

Тогда можно выписать такую последовательность включений:

$$\Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad \ldots$$

Эта последовательность запрещена аксиомой выделения

Значит, какой бы ни была модель для теории, включающей в себя все описанные ранее аксиомы, множество всех множеств не входит в эту модель

Более того, в этой модели верным будет следующее высказывание:

$$\forall \mathtt{u}\ \mathtt{u} \notin \mathtt{u}$$

Теория Цермело-Френкеля

Теория Цермело-Френкеля ZF включает в себя

- аксиому объёмности $(\mathsf{A}{=})$
- схему выделения $(\mathsf{A}{\subseteq}(\varphi))$
- аксиому пустого множества $(\mathsf{A}\emptyset)$
- аксиому пары $(\mathsf{A}2)$
- аксиому объединения $(\mathsf{A}\cup)$
- аксиому бесконечности $(\mathsf{A}\mathbb{N}_0)$
- схему преобразования $(\mathsf{A}{\to}(\varphi))$
- аксиому регулярности $(\mathsf{A}{\downarrow})$

Теория Цермело-Френкеля

Теория Цермело-Френкеля ZF включает в себя

- аксиому объёмности (A=)
- схему выделения (A⊆(φ))
- аксиому пустого множества (A∅)
- аксиому пары (A2)
- аксиому объединения (A∪)
- аксиому бесконечности (A$\mathbb{N}_0$)
- схему преобразования (A→(φ))
- аксиому регулярности (A↓)

Мы показали, что теорией ZF исключается парадокс Кантора, основанный на существовании множества всех множеств

Теория Цермело-Френкеля

Теория Цермело-Френкеля ZF включает в себя

- аксиому объёмности (A=)
- схему выделения (A$\subseteq$(φ))
- аксиому пустого множества (A$\emptyset$)
- аксиому пары (A2)
- аксиому объединения (A$\cup$)
- аксиому бесконечности (A$\mathbb{N}_0$)
- схему преобразования (A$\to$(φ))
- аксиому регулярности (A$\downarrow$)

Мы показали, что теорией ZF исключается парадокс Кантора, основанный на существовании множества всех множеств

Аналогично можно показать, что теорией ZF исключается и парадокс Рассела (а как именно?)

Непротиворечивость теории ZF

А не может ли так случиться, что теория ZF исключает все известные логические противоречия теории множеств, просто потому что она **противоречива**?

Непротиворечивость теории ZF

А не может ли так случиться, что теория ZF исключает все известные логические противоречия теории множеств, просто потому что она **противоречива**?

Как упоминалось ранее,[1] противоречивые теории абсолютно бессмысленны и потому не должны приниматься в рассмотрение

[1] Лекция 10, “Основные свойства теорий”

Непротиворечивость теории ZF

А не может ли так случиться, что теория ZF исключает все известные логические противоречия теории множеств, просто потому что она **противоречива**?

Как упоминалось ранее,[1] противоречивые теории абсолютно бессмысленны и потому не должны приниматься в рассмотрение

Насколько трудно показать непротиворечивость теории ZF?

[1] Лекция 10, “Основные свойства теорий”

Непротиворечивость теории ZF

- Лекция 3: теория ZF непротиворечива $\Leftrightarrow$ существует модель для этой теории

Непротиворечивость теории ZF

- Лекция 3: теория ZF непротиворечива $\Leftrightarrow$ существует модель для этой теории
- Теорией ZF строго описывается набор свойств, которым должны удовлетворять множества

Непротиворечивость теории ZF

- Лекция 3: теория ZF непротиворечива $\Leftrightarrow$ существует модель для этой теории
- Теорией ZF строго описывается набор свойств, которым должны удовлетворять множества
- Если теория ZF непротиворечива, то моделью будет и интерпретация $\mathcal{I}_{set}$, содержащая все (*хорошие*) множества

Непротиворечивость теории ZF

- Лекция 3: теория ZF непротиворечива $\Leftrightarrow$ существует модель для этой теории
- Теорией ZF строго описывается набор свойств, которым должны удовлетворять множества
- Если теория ZF непротиворечива, то моделью будет и интерпретация $\mathcal{I}_{set}$, содержащая все (*хорошие*) множества
- Предметная область модели $\mathcal{I}_{set}$ — это множество...

Непротиворечивость теории ZF

- Лекция 3: теория ZF непротиворечива $\Leftrightarrow$ существует модель для этой теории
- Теорией ZF строго описывается набор свойств, которым должны удовлетворять множества
- Если теория ZF непротиворечива, то моделью будет и интерпретация $\mathcal{I}_{set}$, содержащая все (*хорошие*) множества
- Предметная область модели $\mathcal{I}_{set}$ — это множество...

всех множеств?

Непротиворечивость теории ZF

- Лекция 3: теория ZF непротиворечива $\Leftrightarrow$ существует модель для этой теории
- Теорией ZF строго описывается набор свойств, которым должны удовлетворять множества
- Если теория ZF непротиворечива, то моделью будет и интерпретация $\mathcal{I}_{set}$, содержащая все (*хорошие*) множества
- Предметная область модели $\mathcal{I}_{set}$ — это множество...

  всех множеств?

Пытаясь рассуждать о непротиворечивости и адекватности теории ZF так, как это всегда делалось раньше, мы пришли к тому, что предметной областью модели для ZF является парадоксальное множество

Непротиворечивость теории ZF

- Лекция 3: теория ZF непротиворечива $\Leftrightarrow$ существует модель для этой теории
- Теорией ZF строго описывается набор свойств, которым должны удовлетворять множества
- Если теория ZF непротиворечива, то моделью будет и интерпретация $\mathcal{I}_{set}$, содержащая все (*хорошие*) множества
- Предметная область модели $\mathcal{I}_{set}$ — это множество...

всех множеств?

Пытаясь рассуждать о непротиворечивости и адекватности теории ZF так, как это всегда делалось раньше, мы пришли к тому, что предметной областью модели для ZF является парадоксальное множество

Значит ли это, что теория ZF противоречива?

Непротиворечивость теории ZF

Парадоксальность предполагаемой модели $\mathcal{I}_{set}$ возникает из-за того, что мы пытаемся рассуждать об истинности теории ZF, используя понятия самой теории

Непротиворечивость теории ZF

Парадоксальность предполагаемой модели $\mathcal{I}_{set}$ возникает из-за того, что мы пытаемся рассуждать об истинности теории ZF, используя понятия самой теории

Более того, **любая** интерпретация использует в своём определении понятие “множества”, а значит, *в той или иной мере* будет парадоксальна

Непротиворечивость теории ZF

Парадоксальность предполагаемой модели $\mathcal{I}_{set}$ возникает из-за того, что мы пытаемся рассуждать об истинности теории ZF, используя понятия самой теории

Более того, **любая** интерпретация использует в своём определении понятие “множества”, а значит, *в той или иной мере* будет парадоксальна (*ведь мы так и не знаем, можно ли, используя набор очевидных свойств множеств, получить теоретико-множественное противоречие*)

Непротиворечивость теории ZF

Парадоксальность предполагаемой модели $\mathcal{I}_{set}$ возникает из-за того, что мы пытаемся рассуждать об истинности теории ZF, используя понятия самой теории

Более того, **любая** интерпретация использует в своём определении понятие "множества", а значит, *в той или иной мере* будет парадоксальна (*ведь мы так и не знаем, можно ли, используя набор очевидных свойств множеств, получить теоретико-множественное противоречие*)

Теория ZF противоречива $\Leftrightarrow$ существует ZF-общезначимая формула, являющаяся также ZF-противоречивой

Непротиворечивость теории ZF

Парадоксальность предполагаемой модели $\mathcal{I}_{set}$ возникает из-за того, что мы пытаемся рассуждать об истинности теории ZF, используя понятия самой теории

Более того, **любая** интерпретация использует в своём определении понятие “множества”, а значит, *в той или иной мере* будет парадоксальна (*ведь мы так и не знаем, можно ли, используя набор очевидных свойств множеств, получить теоретико-множественное противоречие*)

Теория ZF противоречива $\Leftrightarrow$ существует ZF-общезначимая формула, являющаяся также ZF-противоречивой

На данный момент мы не предъявили ни одной такой формулы

Непротиворечивость теории ZF

Парадоксальность предполагаемой модели $\mathcal{I}_{set}$ возникает из-за того, что мы пытаемся рассуждать об истинности теории ZF, используя понятия самой теории

Более того, **любая** интерпретация использует в своём определении понятие “множества”, а значит, *в той или иной мере* будет парадоксальна (*ведь мы так и не знаем, можно ли, используя набор очевидных свойств множеств, получить теоретико-множественное противоречие*)

Теория ZF противоречива $\Leftrightarrow$ существует ZF-общезначимая формула, являющаяся также ZF-противоречивой

На данный момент мы не предъявили ни одной такой формулы

А можно ли изменить определение непротиворечивости теории так, чтобы при этом избежать теоретико-множественных парадоксов?

Непротиворечивость теории ZF

Вспомним последнюю часть лекции 10,
“исчисление предикатов”:

Непротиворечивость теории ZF

Вспомним последнюю часть лекции 10,
“исчисление предикатов”:

теория — это исчисление, в котором общезначимые формулы выводятся по правилу modus ponens и правилу обобщения из аксиом исчисления предикатов и аксиом теории

Непротиворечивость теории ZF

Вспомним последнюю часть лекции 10,
"исчисление предикатов":

теория — это исчисление, в котором общезначимые формулы выводятся по правилу modus ponens и правилу обобщения из аксиом исчисления предикатов и аксиом теории

Теория (*как исчисление*) противоречива, если существует формула φ, выводимая вместе со своим отрицанием $\neg\varphi$

Непротиворечивость теории ZF

Вспомним последнюю часть лекции 10,
"исчисление предикатов":

теория — это исчисление, в котором общезначимые формулы выводятся по правилу modus ponens и правилу обобщения из аксиом исчисления предикатов и аксиом теории

Теория (*как исчисление*) противоречива, если существует формула φ, выводимая вместе со своим отрицанием $\neg\varphi$

Такое определение противоречивости **не приводит к парадоксам** и часто используется теми, кто исследует противоречивость аксиоматических теорий множеств

Непротиворечивость теории ZF

Вспомним последнюю часть лекции 10,
"исчисление предикатов":

теория — это исчисление, в котором общезначимые формулы выводятся по правилу modus ponens и правилу обобщения из аксиом исчисления предикатов и аксиом теории

Теория (*как исчисление*) противоречива, если существует формула φ, выводимая вместе со своим отрицанием $\neg\varphi$

Такое определение противоречивости **не приводит к парадоксам** и часто используется теми, кто исследует противоречивость аксиоматических теорий множеств

При этом обоснование непротиворечивости теории в такой постановке довольно трудно

Непротиворечивость теории ZF

Вспомним последнюю часть лекции 10,
"исчисление предикатов":

теория — это исчисление, в котором общезначимые формулы выводятся по правилу modus ponens и правилу обобщения из аксиом исчисления предикатов и аксиом теории

Теория (*как исчисление*) противоречива, если существует формула φ, выводимая вместе со своим отрицанием $\neg\varphi$

Такое определение противоречивости **не приводит к парадоксам** и часто используется теми, кто исследует противоречивость аксиоматических теорий множеств

При этом обоснование непротиворечивости теории в такой постановке довольно трудно: требуется не привести модель теории, а **доказать, что ни для какой выводимой формулы нельзя вывести её отрицание**

Непротиворечивость теории ZF

Ещё один фактор, усложняющий проблему проверки противоречивости ZF:

Непротиворечивость теории ZF

Ещё один фактор, усложняющий проблему проверки противоречивости ZF:

- в рамках теории множеств описывается множество $\mathbb{N}_0$ (лекция 13 и аксиома бесконечности)

Непротиворечивость теории ZF

Ещё один фактор, усложняющий проблему проверки противоречивости ZF:

- в рамках теории множеств описывается множество $\mathbb{N}_0$ (лекция 13 и аксиома бесконечности)
- также в этой теории можно определить операции сложения и умножения чисел (вроде бы это просто?)

Непротиворечивость теории ZF

Ещё один фактор, усложняющий проблему проверки противоречивости ZF:

- в рамках теории множеств описывается множество $\mathbb{N}_0$ (лекция 13 и аксиома бесконечности)
- также в этой теории можно определить операции сложения и умножения чисел (вроде бы это просто?)
- значит, в терминах множеств можно описать фрагмент арифметики со сложением и умножением

Непротиворечивость теории ZF

Ещё один фактор, усложняющий проблему проверки противоречивости ZF:

- в рамках теории множеств описывается множество $\mathbb{N}_0$ (лекция 13 и аксиома бесконечности)
- также в этой теории можно определить операции сложения и умножения чисел (вроде бы это просто?)
- значит, в терминах множеств можно описать фрагмент арифметики со сложением и умножением
- этот фрагмент оказывается достаточно выразительным для того, чтобы предъявить **невыводимую** формулу, утверждающую непротиворечивость теории множеств

Непротиворечивость теории ZF

Ещё один фактор, усложняющий проблему проверки противоречивости ZF:

- в рамках теории множеств описывается множество $\mathbb{N}_0$ (лекция 13 и аксиома бесконечности)
- также в этой теории можно определить операции сложения и умножения чисел (вроде бы это просто?)
- значит, в терминах множеств можно описать фрагмент арифметики со сложением и умножением
- этот фрагмент оказывается достаточно выразительным для того, чтобы предъявить **невыводимую** формулу, утверждающую непротиворечивость теории множеств (формула строится примерно так же, как и невыводимая формула в теореме Гёделя о неполноте)

Непротиворечивость теории ZF

Текущее состояние дел:

непротиворечивость теории ZF —
открытая проблема

Расширения теории ZF

Расширения теории ZF

Попробуем доказать несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Расширения теории ZF

Попробуем доказать несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Доказательство.

В любом бесконечном множестве X содержится хотя бы один элемент e_1

Расширения теории ZF

Попробуем доказать несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Доказательство.

В любом бесконечном множестве X содержится хотя бы один элемент e_1

Множество $X \setminus \{e_1\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_2

Расширения теории ZF

Попробуем доказать несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Доказательство.

В любом бесконечном множестве X содержится хотя бы один элемент e_1

Множество $X \setminus \{e_1\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_2

Множество $X \setminus \{e_1, e_2\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_3

Расширения теории ZF

Попробуем доказать несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Доказательство.

В любом бесконечном множестве X содержится хотя бы один элемент e_1

Множество $X \setminus \{e_1\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_2

Множество $X \setminus \{e_1, e_2\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_3

Бесконечно продолжая процесс *выбора* элементов e_i, получим требуемое счётное подмножество $\{e_1, e_2, \dots\}$ ▼

Расширения теории ZF

А теперь другое утверждение:

Утверждение

Для любого натурального числа N декартово произведение N непустых множеств непусто

Расширения теории ZF

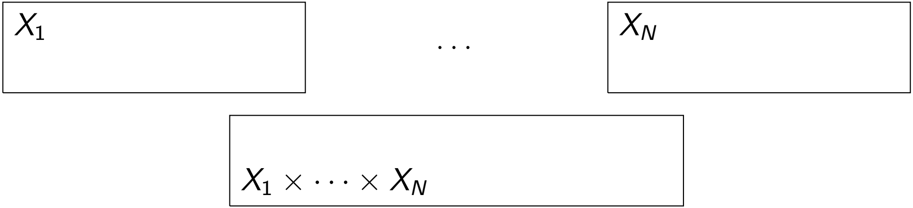
А теперь другое утверждение:

Утверждение

Для любого натурального числа N декартово произведение N непустых множеств непусто

Доказательство.

Рассмотрим произвольные непустые множества $X_1, \ldots, X_N$



Расширения теории ZF

А теперь другое утверждение:

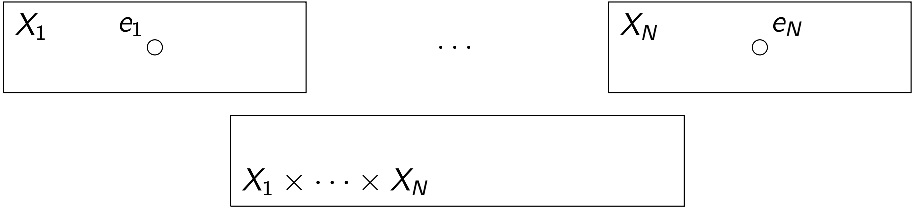
Утверждение

Для любого натурального числа N декартово произведение N непустых множеств непусто

Доказательство.

Рассмотрим произвольные непустые множества $X_1, \dots, X_N$

Пройдёмся по этим множествам от первого к N-му, и из каждого (i-го) *выберем* элемент e_i



Расширения теории ZF

А теперь другое утверждение:

Утверждение

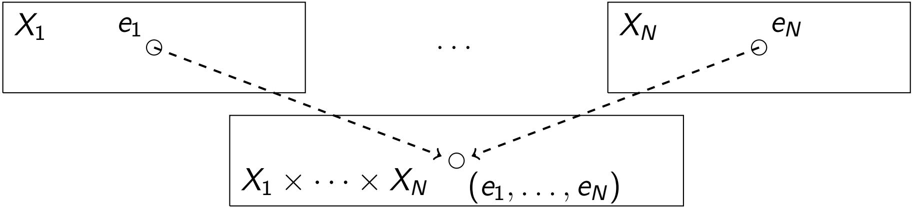
Для любого натурального числа N декартово произведение N непустых множеств непусто

Доказательство.

Рассмотрим произвольные непустые множества $X_1, \ldots, X_N$

Пройдёмся по этим множествам от первого к N-му, и из каждого (i-го) *выберем* элемент e_i

Тогда элемент $(e_1, \ldots, e_N)$ принадлежит декартову произведению $X_1 \times \cdots \times X_N$



Расширения теории ZF

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

Расширения теории ZF

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Расширения теории ZF

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

Расширения теории ZF

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

А если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{R}}$?

Расширения теории ZF

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathbb{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

А если $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{R}}$?

- минимальное число из каждого множества выбрать нельзя, так как его может не существовать

Расширения теории ZF

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathbb{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

А если $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{R}}$?

- минимальное число из каждого множества выбрать нельзя, так как его может не существовать
- пошаговый процесс выбора описать тоже нельзя, так как $|2^{\mathbb{R}}| = \aleph_1$

Расширения теории ZF

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

А если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{R}}$?

- минимальное число из каждого множества выбрать нельзя, так как его может не существовать
- пошаговый процесс выбора описать тоже нельзя, так как $|2^{\mathbb{R}}| = \aleph_1$

Тогда возможность такого *выбора* становится не так очевидна

Расширения теории ZF

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция φ, сопоставляющая каждому множеству ровно один его элемент

Расширения теории ZF

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция φ, сопоставляющая каждому множеству ровно один его элемент

$$\text{АВ}: \forall\mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists\mathtt{f}\ (\mathrm{Func}_{\mathtt{X}\to\cup\mathtt{X}}(\mathtt{f})\ \&\ \forall\mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \to \mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y})))$$

Расширения теории ZF

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция φ, сопоставляющая каждому множеству ровно один его элемент

AB: $\forall\mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists\mathtt{f}\ (\mathrm{Func}_{\mathtt{X}\to\cup\mathtt{X}}(\mathtt{f})\ \&\ \forall\mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \to \mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y})))$

- Лекция 13: функция — это множество пар

Расширения теории ZF

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция φ, сопоставляющая каждому множеству ровно один его элемент

$$\text{АВ}: \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{f}\ (\mathrm{Func}_{\mathtt{X}\to\cup\mathtt{X}}(\mathtt{f})\,\&\,\forall \mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \to \mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y})))$$

- Лекция 13: функция — это множество пар; пара описывается множеством

Расширения теории ZF

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция φ, сопоставляющая каждому множеству ровно один его элемент

AB: $\forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{f}\ (\mathrm{Func}_{\mathtt{X}\to\cup\mathtt{X}}(\mathtt{f})\ \&\ \forall \mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \to \mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y})))$

- Лекция 13: функция — это множество пар; пара описывается множеством
- Соотношение $\mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y}$ легко записывается в терминах множеств

Расширения теории ZF

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция φ, сопоставляющая каждому множеству ровно один его элемент

AB: $\forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{f}\ (\mathrm{Func}_{\mathtt{X}\to\cup\mathtt{X}}(\mathtt{f})\ \&\ \forall \mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \to \mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y})))$

- Лекция 13: функция — это множество пар; пара описывается множеством
- Соотношение $\mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y}$ легко записывается в терминах множеств (как?)

Расширения теории ZF

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция φ, сопоставляющая каждому множеству ровно один его элемент

$$\mathsf{AB}\colon \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{f}\ (\mathrm{Func}_{\mathtt{X}\to\cup\mathtt{X}}(\mathtt{f})\ \&\ \forall \mathtt{Y}\ (\mathtt{Y} \in \mathtt{X} \to \mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y})))$$

- Лекция 13: функция — это множество пар; пара описывается множеством
- Соотношение $\mathtt{f}(\mathtt{Y}) \in \mathtt{Y}$ легко записывается в терминах множеств (как?)

В такой постановке возможность *выбора* становится ещё менее очевидной

Расширения теории ZF

Вернёмся к аксиоме выбора немного позже, а сейчас сформулируем **континуум-гипотезу**

Расширения теории ZF

Вернёмся к аксиоме выбора немного позже, а сейчас сформулируем **континуум-гипотезу**: не существует мощности множеств строго между $\aleph_0$ и $\aleph_1$

Расширения теории ZF

Вернёмся к аксиоме выбора немного позже, а сейчас сформулируем **континуум-гипотезу**: не существует мощности множеств строго между $\aleph_0$ и $\aleph_1$

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X}\ (|\mathtt{X}| < \aleph_1 \rightarrow |\mathtt{X}| \leq \aleph_0)$$

Расширения теории ZF

Вернёмся к аксиоме выбора немного позже, а сейчас сформулируем **континуум-гипотезу**: не существует мощности множеств строго между $\aleph_0$ и $\aleph_1$

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X}\ (|\mathtt{X}| < \aleph_1 \to |\mathtt{X}| \leq \aleph_0)$$

(*для простоты записи КГ сформулирована не совсем строго*)

Расширения теории ZF

Вернёмся к аксиоме выбора немного позже, а сейчас сформулируем **континуум-гипотезу**: не существует мощности множеств строго между $\aleph_0$ и $\aleph_1$

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X} \; (|\mathtt{X}| < \aleph_1 \rightarrow |\mathtt{X}| \leq \aleph_0)$$

(*для простоты записи КГ сформулирована не совсем строго*)

А насколько правдоподобны аксиома выбора и континуум-гипотеза?

Расширения теории ZF

Вернёмся к аксиоме выбора немного позже, а сейчас сформулируем **континуум-гипотезу**: не существует мощности множеств строго между $\aleph_0$ и $\aleph_1$

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X}\ (|\mathtt{X}| < \aleph_1 \to |\mathtt{X}| \leq \aleph_0)$$

(*для простоты записи КГ сформулирована не совсем строго*)

А насколько правдоподобны аксиома выбора и континуум-гипотеза?

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора ($\mathrm{ZFC} = \mathrm{ZF} \cup \{\mathrm{AB}\}$) сейчас наиболее популярна при работе с аксиоматической теорией множеств

Расширения теории ZF

Вернёмся к аксиоме выбора немного позже, а сейчас сформулируем **континуум-гипотезу**: не существует мощности множеств строго между $\aleph_0$ и $\aleph_1$

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X}\ (|\mathtt{X}| < \aleph_1 \to |\mathtt{X}| \leq \aleph_0)$$

(*для простоты записи КГ сформулирована не совсем строго*)

А насколько правдоподобны аксиома выбора и континуум-гипотеза?

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора ($\text{ZFC} = \text{ZF} \cup \{\text{АВ}\}$) сейчас наиболее популярна при работе с аксиоматической теорией множеств

- Если теория ZF непротиворечива, то теории ZFC и $\text{ZF} \cup \{\text{КГ}\}$ непротиворечивы (*Гёдель, 1940*)

Расширения теории ZF

Вернёмся к аксиоме выбора немного позже, а сейчас сформулируем **континуум-гипотезу**: не существует мощности множеств строго между $\aleph_0$ и $\aleph_1$

$$\text{КГ}: \forall X \left(|X| < \aleph_1 \rightarrow |X| \le \aleph_0\right)$$

(*для простоты записи КГ сформулирована не совсем строго*)

А насколько правдоподобны аксиома выбора и континуум-гипотеза?

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора ($\text{ZFC} = \text{ZF} \cup \{\text{АВ}\}$) сейчас наиболее популярна при работе с аксиоматической теорией множеств

- Если теория ZF непротиворечива, то теории ZFC и $\text{ZF} \cup \{\text{КГ}\}$ непротиворечивы (*Гёдель, 1940*)
- Если теория ZF непротиворечива, то добавление к этой теории одной из аксиом АВ, $\neg$АВ и/или одной из аксиом КГ, $\neg$КГ сохраняет непротиворечивость теории (*Коэн, 1963*)

Конец лекции 14