Распределенные алгоритмы и системы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

Блок 17

Построение оптимальных путей для всех пар вершин
Алгоритм Флойда-Уоршелла

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Построение оптимальных путей для всех пар вершин

Далее будет рассматриваться алгоритм Туэга вычисления таблиц маршрутизации в узлах сети

Этот алгоритм основан на решении задачи построения оптимальных путей для всех пар вершин: для каждой пары вершин графа вычислить вес оптимального пути из u в v

Прежде чем перейти к алгоритму Туэга, обсудим (нераспределённый) алгоритм решения этой задачи построения оптимальных путей в графе — алгоритм Флойда-Уоршелла

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Дано:

- граф $G = (V, E)$
- набор весов $\omega_e \in \mathbb{Z}$ всех рёбер $e \in E$, такой что в графе G с этими весами нет циклов отрицательного веса
  - вес $C(P)$ пути P — это сумма весов рёбер этого пути

Требуется: вычислить набор весов $\delta(v, w)$ оптимальных путей из v в w

- (если w недостижимо из v, то этот вес будем считать бесконечным)

Все вершины пути, кроме первой и последней, назовём промежуточными

Для множества вершин S:

- S-путём назовём путь, все промежуточные вершины которого принадлежат множеству S
- S-расстоянием $\delta^S(v, w)$ между вершинами v и w назовём наименьший вес S-пути из v в w

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Алгоритм Флойда-Уоршелла сперва вычисляет все $\emptyset$-расстояния и затем расширяет множество промежуточных вершин, пока не будут построены все V-расстояния

Теорема (об S-путях). **Для любых вершины v и множества S, $S \subseteq V$, верно следующее:**

1. $\delta^S(v, v) = 0$
2. **Для любой вершины w, отличной от v, верно следующее:**
   - 2.1 **Существует $\emptyset$-путь из v в w $\Leftrightarrow$ $(v, w) \in E$**
   - 2.2 **Если $e = (v, w) \in E$, то $\delta^\emptyset(v, w) = \omega_e$, а иначе $\delta^\emptyset(v, w) = \infty$**
   - 2.3 **Если $S' = S \cup \{u\}$, то верно следующее:**
     - 2.3.1 **Простой S'-путь из v в w является либо S-путём из v в w, либо последовательным сцеплением S-пути из v в u и S-пути из u в w**
     - 2.3.2 $\delta^{S'}(v, w) = \min(\delta^S(v, w), \delta^S(v, u) + \delta^S(u, w))$
   - 2.4 **Любой путь из v в w является V-путём из v в w**
   - 2.5 $\delta(v, w) = \delta^V(v, w)$

Доказательство. Это **задача 1**

(достаточно умело применить определения и лемму о простых путях)

Алгоритм Флойда-Уоршелла

На последней теореме основан алгоритм Флойда-Уоршелла:

1. $S := \emptyset$;
2. Перебрать все пары $(v, w) \in V^2$, и для каждой:
   2.1 Если $v = w$: $d[v, w] := 0$;
   2.2 Если $(v, w) \in E$: $d[v, w] := \omega_{(v,w)}$;
   2.3 Иначе: $d[v, w] := \infty$;
3. Пока $S \neq V$:
   3.1 Произвольно выбрать $u \in V \setminus S$
   3.2 Перебрать все пары $(v, w) \in V^2$, и для каждой:
      3.2.1 $d[v, w] := \min(d[v, w], d[v, u] + d[u, w])$;
   3.3 $S := S \cup \{u\}$;
4. Выдать ответ: $\delta(v, w) = d[v, w]$ для каждой пары (v, w)

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Теорема. Алгоритм Флойда-Уоршелла выдаёт правильный ответ за $\Theta(|V|^3)$ действий (присваиваний и проверок условий)

Доказательство. *Сложность*

В блоке 3 выполняется $|V|$ итераций, и в каждой итерации — $\Theta(|V|^2)$ действий, итого $\Theta(|V|^3)$ операций

В остальных блоках выполняется по порядку меньше операций (в блоке 1 — одна, в блоке 2 — $\Theta(|V|^2)$)

Правильность обеспечивается теоремой об S-путях:

- в блоке 2 устанавливаются значения $\delta^{\emptyset}$ по пунктам 2.1 и 2.2 теоремы
- на каждой итерации блока 3 происходит пересчёт значений по пункту 2.3.2 теоремы
- ответ в блоке 4 выдаётся по пункту 2.5 теоремы ▼