Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы
$\to$ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Вне программы 03

Пара слов о λ-исчислении

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Просто типизированное λ-исчисление ($\mathfrak{L}$) — это логическое исчисление, устроенное так

Типы над множеством простых типов $\mathcal{T}$ задаются БНФ

$$\tau \ ::= \ (\tau \to \tau) \ | \ T,$$

где $T \in \mathcal{T}$

Содержательно, $\tau_1 \to \tau_2$ — это тип отображений элементов типа τ_1 в элементы типа τ_2

Просто типизированные λ-термы задаются БНФ

$$e \ ::= \ x \ | \ c \ | \ (\lambda x : \tau . e) \ | \ (e \ \ e),$$

где

- x — переменная ($x \in \mathrm{Var}$),
- c — константа ($c \in \mathrm{Const}$, и для каждой константы задан тип),
- τ — тип и
- e — λ-терм

Содержательно,

- «$(\lambda x : \tau . e)$» обозначает отображение с аргументом x типа τ, возвращающее для значения v этого аргумента значение выражения e на v
- «$(e_1\ e_2)$» обозначает результат применения отображения, записанного как e_1, к аргументу, записанному как e_2

Суждение о типе (typing assumption) — это запись вида $e : \tau$, где

- e — λ-терм и
- τ — тип

Содержательное прочтение суждения: «выражение e имеет тип τ»

$\mathcal{TA}$ — так обозначим множество всевозможных суждений о типе

Основное назначение исчисления $\mathfrak{L}$ — это логический вывод (*и доказательство*) суждений о типах выражений, то есть вывод типов (type inference)

Формулами исчисления $\mathfrak{L}$ являются секвенции вида $\Gamma \vdash ta$, где

- ta — суждение о типе и
- Γ — множество суждений о типе

Содержательное прочтение секвенции устроено так же, как и в натуральном исчислении: «если верно всё записанное слева от $\vdash$, то доказанно верно и записанное справа»

В $\mathfrak{L}$ содержится одна схема аксиом, устроенная так же, как и схема аксиом в натуральном исчислении: $\Gamma \cup \{ta\} \vdash ta$, где $\Gamma \subseteq \mathcal{TA}$ и $ta \in \mathcal{TA}$

Правила вывода $\mathfrak{L}$ — это часть системы вывода типов, относящаяся к λ-термам без учёта смысла простых типов:

$$\frac{\Gamma \cup \{x : \tau_1\} \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash (\lambda x : \tau_1 . e) : (\tau_1 \to \tau_2)} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1,\ \ \Gamma \vdash e_2 : \tau_1 \to \tau_2}{\Gamma \vdash (e_2\ e_1) : \tau_2}$$

Смысл простых типов и сопутствующие элементы системы вывода могут быть выражены в виде подходящих правил вывода, добавляющихся в исчисление

Пример вывода в $\mathfrak{L}$:

$$
\begin{array}{l}
\oplus : \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B}),\ \mathfrak{t} : \mathbb{B},\ x : \mathbb{B} \vdash \oplus : \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B}) \\
\oplus : \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B}),\ \mathfrak{t} : \mathbb{B},\ x : \mathbb{B} \vdash x : \mathbb{B} \\
\oplus : \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B}),\ \mathfrak{t} : \mathbb{B},\ x : \mathbb{B} \vdash (\oplus\ x) : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\
\oplus : \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B}),\ \mathfrak{t} : \mathbb{B},\ x : \mathbb{B} \vdash \mathfrak{t} : \mathbb{B} \\
\oplus : \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B}),\ \mathfrak{t} : \mathbb{B},\ x : \mathbb{B} \vdash ((\oplus\ x)\mathfrak{t}) : \mathbb{B} \\
\oplus : \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B}),\ \mathfrak{t} : \mathbb{B} \vdash (\lambda x : \mathbb{B}.((\oplus\ x)\ \mathfrak{t}) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}
\end{array}
$$

Расшифровка последней секвенции: доказанно верно, что

- если
  - $\oplus$ — функция, преобразующая пару булевых значений в булево значение и
  - $\mathfrak{t}$ — булева константа,
- то
  - выражение, принимающее на вход булево значение x и возвращающее результат выражения $x \oplus \mathfrak{t}$ на нём, является функцией, отображающей булевы значения в булевы значения