

Лекция 9. Вероятностный метод. Метод второго момента (теория и практика)

Лектор — Нагорный Александр Степанович
anagorny@list.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Метод второго момента. Ещё немного теории

Рассмотрим неотрицательную целочисленную случайную величину X . Предположим, что нам потребуется оценить вероятность $\Pr[X = 0]$ при заданном значении $\mu = \mathbf{E}[X]$. Если $\mu < 1$, то можно использовать неравенство

$$\Pr[X > 0] \leq \mathbf{E}[X],$$

так что если $\mathbf{E}[X] \rightarrow 0$, то $X = 0$ почти всегда. (На самом деле, мы мысленно имеем дело с бесконечной последовательностью X — ов, зависящей от некоторого параметра $n \rightarrow \infty$.) Предположим теперь, что $\mathbf{E}[X] \rightarrow \infty$. При этом вовсе не обязательно окажется, что $X > 0$ почти всегда. Для того, чтобы сделать вывод о том, что $X > 0$ почти всегда, нужна дополнительная информация (например, о $\text{Var}[X]$).

Метод второго момента. Ещё немного теории

Теорема 1. Имеет место неравенство

$$\Pr[X = 0] \leq \frac{\text{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda = \mu/\sigma$ в неравенстве Чебышёва. Тогда

$$\Pr[X = 0] \leq \Pr[|X - \mu| \geq \lambda\sigma] \leq \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{\mu^2}. \quad \blacksquare$$

Чаще всего мы будем применять этот результат в асимптотической форме.

Следствие 1. Если $\text{Var}[X] = o(\mathbb{E}[X]^2)$, то $X > 0$ почти всегда.

Метод второго момента. Ещё немного теории

Доказательство теоремы 1, в действительности, позволяет утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\Pr[|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon \mathbf{E}[X]] \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2 \mathbf{E}[X]^2}$$

и, таким образом, в асимптотической форме, мы и в самом деле имеем следующий, более сильный результат.

Следствие 2. Если $\text{Var}[X] = o(\mathbf{E}[X]^2)$, то $X \sim \mathbf{E}[X]$ почти всегда.

Метод второго момента. Ещё немного теории

Предположим, что $X = X_1 + \dots + X_m$, где X_i является индикатором события A_i . Для индексов i, j мы пишем $i \sim j$, если $i \neq j$ и события A_i, A_j не являются независимыми. Положим (сумма ведётся по упорядоченным парам)

$$\Delta = \sum_{i \sim j} \Pr[A_i \wedge A_j].$$

Заметим, что при $i \sim j$

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = \mathbf{E}[X_i X_j] - \mathbf{E}[X_i] \mathbf{E}[X_j] \leq \mathbf{E}[X_i X_j] = \Pr[A_i \wedge A_j],$$

а при $i \neq j$ и $i \not\sim j$ имеем $\text{Cov}[X_i, X_j] = 0$. Итак,

$$\text{Var}[X] \leq \mathbf{E}[X] + \Delta.$$

Следствие 3. Если $\mathbf{E}[X] \rightarrow \infty$, и $\Delta = o(\mathbf{E}[X]^2)$, то $X > 0$ почти всегда. Более того, $X \sim \mathbf{E}[X]$ почти всегда.

Метод второго момента. Ещё немного теории

Будем говорить, что индикаторы $X_1, \dots, X_m$ **симметричны**, если для любых $i \neq j$ существует автоморфизм рассматриваемого вероятностного пространства, отображающий событие A_i в событие A_j . В нашем случае мы пишем

$$\Delta = \sum_{i \sim j} \Pr[A_i \wedge A_j] = \sum_i \Pr[A_i] \sum_{j \sim i} \Pr[A_j | A_i],$$

причём внутренняя сумма (в силу симметрии) при всех i одна и та же. Положим

$$\Delta^* = \sum_{j \sim i} \Pr[A_j | A_i],$$

где i — фиксировано. Тогда

$$\Delta = \sum_i \Pr[A_i] \Delta^* = \Delta^* \sum_i \Pr[A_i] = \Delta^* \mathbf{E}[X].$$

Метод второго момента. Ещё немного теории

Следствие 4. Если $\mathbf{E}[X] \rightarrow \infty$, и $\Delta^* = o(\mathbf{E}[X])$, то $X > 0$ почти всегда. Кроме того, $X \sim \mathbf{E}[X]$ почти всегда.

Условие следствия 4 имеет следующий интуитивный смысл. Учёт того условия, что некоторое конкретное событие A_i происходит, несущественно увеличивает среднее число $\mathbf{E}[X]$ происходящих событий.

Случайные графы. Определения

Пусть n является натуральным числом, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество графов с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$.

Определение 1. Вероятностное пространство $G(n, p)$, определённое в соответствии с распределением

$$\Pr[\{i, j\} \in E(G)] = p,$$

где все события попарно независимы, называется **стандартной моделью случайного графа**, или, короче, **случайным графом**.

Данная модель часто применяется в вероятностном методе для доказательства существования некоторых графов.

Случайные графы. Определения и примеры

Пусть задано некоторое теоретико-графовое свойство A .

Обозначим через $\Pr[G(n, p) \models A]$ вероятность того, что случайный граф $G(n, p)$ обладает свойством A .

Заметим, что, если свойство A является монотонным, то и вероятность $\Pr[G(n, p) \models A]$ будет монотонной функцией от p .

Случайные графы. Пример

Пример. Обозначим через A свойство (фактически, событие) « G свободен от треугольников». Пусть X — число треугольников в $G(n, p)$. Из линейности математического ожидания получим

$$\mathbf{E}[X] = \binom{n}{3} p^3.$$

Обозначим $c = pn$. Тогда если $c = \text{const}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{3} p^3 = c^3/6.$$

Получается, что распределение величины X асимптотически является пуассоновским. В частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[G(n, p) \models A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[X = 0] = e^{-c^3/6}.$$

Заметим, что $\lim_{c \rightarrow 0} e^{-c^3/6} = 1$, а $\lim_{c \rightarrow \infty} e^{-c^3/6} = 0$.

Случайные графы. Пример

Пример (продолжение). Когда $p = 10^{-6}/n$, очень маловероятно, что граф $G(n, p)$ содержит треугольники. С другой стороны, если $p = 10^6/n$, то граф $G(n, p)$ содержит треугольники с большой вероятностью.

С динамической точки зрения, с ростом p треугольники начинают появляться, когда $p = \Theta(1/n)$.

Если мы возьмём функцию $p(n) = n^{-0.9}$ (при этом $p(n) \gg n^{-1}$), то граф $G(n, p)$ почти наверняка будет содержать треугольники. Наоборот, когда $p(n) \ll n^{-1}$, например, при $p(n) = 1/(n \ln n)$, граф $G(n, p)$ почти наверняка будет свободным от треугольников.

Случайные графы. Пороговая функция

Эрдёш и Реньи заметили, что многие естественные теоретико-графовые свойства становятся верными в очень узком промежутке значений p . Они ввели следующее ключевое определение.

Определение 2. Функцию натурального аргумента $r(n)$ назовём **пороговой функцией** теоретико-графового свойства A , если выполнены следующие два условия:

- 1) если $p(n) \ll r(n)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[G(n, p) \models A] = 0$;
- 2) если $p(n) \gg r(n)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[G(n, p) \models A] = 1$.

(Вероятности 0 и 1 можно поменять местами.)

Случайные графы. Пример

В нашем примере функция $1/n$ является пороговой функцией для A .

Замечание 1. Пороговая функция, если она существует, — не единственная. Мы могли бы сказать, что и $10/n$ является пороговой функцией для A .

Случайные графы. Пороговая функция для $\omega(G) \geq 4$

Определение 3. Кликой K_k размера k называется полный граф на k вершинах.

Обозначим через $\omega(G)$ максимальный размер клики (которая является подграфом) в графе G .

Теорема 2. В случайном графе $G(n, p)$ функция $n^{-2/3}$ является пороговой функцией для свойства $\omega(G) \geq 4$.

Доказательство. Для каждого четырёхэлементного подмножества S множества вершин графа $G(n, p)$ обозначим через A_S событие «подграф, порождённый S , является кликой».

Случайные графы. Пороговая функция для $\omega(G) \geq 4$

Доказательство (продолжение). Пусть X_S — индикатор события A_S . Тогда

$$\mathbf{E}[X_S] = \Pr[A_S] = p^6,$$

поскольку графу $G(n, p)$ должны принадлежать 6 различных рёбер. Пусть

$$X = \sum_{|S|=4} X_S,$$

так что X — число 4-клик в графе G , а $\omega(G) \geq 4$ тогда и только тогда, когда $X > 0$. В силу линейности математического ожидания имеем

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{|S|=4} \mathbf{E}[X_S] = \binom{n}{4} p^6 \sim \frac{n^4 p^6}{24}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если $p \ll n^{-2/3}$, то $\mathbf{E}[X] = o(1)$, значит, $X = 0$ почти наверняка.

Случайные графы. Пороговая функция для $\omega(G) \geq 4$

Доказательство (продолжение). Пусть теперь $p \gg n^{-2/3}$, а значит, $\mathbf{E}[X] \rightarrow \infty$. Рассмотрим Δ^* из следствия 4. (Все четырёхэлементные множества «неотличимы друг от друга», поэтому множество всех X_S симметрично). Здесь $S \sim T$ тогда и только тогда, когда $S \neq T$ и у S и T есть общие рёбра, т. е. тогда и только тогда, когда $|S \cap T| = 2$ или 3 . Зафиксируем S .

Существует $O(n^2)$ множеств T , таких, что $|S \cap T| = 2$, причём для каждого из них $\Pr[A_T | A_S] = p^5$.

Существует $O(n)$ множеств T , таких, что $|S \cap T| = 3$, причём для каждого из них $\Pr[A_T | A_S] = p^3$.

Доказательство (окончание).

Таким образом, поскольку $p \gg n^{-2/3}$, имеем,
 $\Delta^* = O(n^2 p^5) + O(np^3) = o(n^4 p^6)$, а, значит, $\Delta^* = o(\mathbf{E}[X]), n \rightarrow \infty$.

Значит, следствие 4 применимо и $X > 0$, т. е. клика размера 4 в графе $G(n, p)$ в случае $p \gg n^{-2/3}$ существует почти всегда. ■

Сбалансированные и строго сбалансированные графы

Сформулируем и докажем более общий результат. Нам понадобятся новые понятия.

Определение 4. Рассмотрим граф H с v вершинами и e рёбрами. Назовём отношение $\rho(H) = e/v$ **плотностью** графа H . Граф H называется **сбалансированным**, если для каждого его подграфа H' выполнено неравенство $\rho(H') \leq \rho(H)$. Назовём граф H **строго сбалансированным**, если для каждого собственного подграфа H' выполнено строгое неравенство $\rho(H') < \rho(H)$.

Упражнение. Постройте примеры графов, которые не являются сбалансированными, являются строго сбалансированными и являются сбалансированными, но не строго, соответственно.

Наличие заданного сбалансированного подграфа

Теорема 3. Рассмотрим сбалансированный граф H с v вершинами и e рёбрами. Пусть событие $A(G) = \ll H \text{ является подграфом (не обязательно порождённым) случайного графа } G(n, p) \gg$. Тогда $p = n^{-v/e}$ является пороговой функцией для A .

Доказательство. Пусть $G \sim G(n, p)$. Для каждого v — множества $S \subseteq V(G)$ событие $A_S = \ll G|_S \text{ содержит } H \text{ в качестве подграфа} \gg$. Тогда

$$p^e \leq \Pr[A_S] \leq v! p^e.$$

Обозначим через X_S индикатор события A_S . Тогда $X = \sum_{|S|=v} X_S$.

Наличие заданного сбалансированного подграфа

Доказательство (продолжение).

Ясно, что событие $A(G)$ происходит тогда и только тогда, когда $X > 0$. Из линейности математического ожидания вытекает, что

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{|S|=v} \mathbf{E}[X_S] = \binom{n}{v} \Pr[A_S] = \Theta(n^v p^e).$$

Если $p \ll n^{-v/e}$, то $\mathbf{E}[X] = o(1)$, значит, $X = 0$ почти наверняка. Пусть теперь $p \gg n^{-v/e}$, а значит, $\mathbf{E}[X] \rightarrow \infty$. Рассмотрим Δ^* из следствия 4. (все v — множества «равноправны», поэтому все X_S симметричны). Здесь $S \sim T$ в том и только в том случае, когда $S \neq T$ и у S и T есть общие рёбра, т. е. тогда и только тогда, когда $|S \cap T| = i$ с $2 \leq i \leq v - 1$. Зафиксируем S .

Наличие заданного сбалансированного подграфа

Доказательство (продолжение). Имеем

$$\Delta^* = \sum_{T \sim S} \Pr[A_T | A_S] = \sum_{i=2}^{v-1} \sum_{|T \cap S|=i} \Pr[A_T | A_S].$$

Для каждого i существует $O(n^{v-i})$ способов выбора T . Зафиксируем S , T и рассмотрим $\Pr[A_T | A_S]$. Имеется $O(1)$ возможных копий графа H на множестве T . Каждая из них имеет (поскольку граф H сбалансированный) не более $\frac{ie}{v}$ рёбер с обоими концами в S , а, значит, не менее $e - \frac{ie}{v}$ рёбер другого типа. Отсюда

$$\Pr[A_T | A_S] = O(p^{e - \frac{ie}{v}}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Наличие заданного сбалансированного подграфа

Доказательство (окончание).

и

$$\Delta^* = \sum_{i=2}^{v-1} O(n^{v-i} p^{e-\frac{ie}{v}}) = \sum_{i=2}^{v-1} O((n^v p^e)^{1-\frac{i}{v}}) = \sum_{i=2}^{v-1} o(n^v p^e) = o(\mathbf{E}[X]),$$

так как $n^v p^e \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что применимо следствие 4. ■

Случай несбалансированного подграфа

Теорема 4. В обозначениях теоремы 3, если H не является сбалансированным, то $p = n^{-v/e}$ не является пороговой функцией для события A .

Доказательство.

Пусть $G \sim G(n, p)$, и пусть H_1 — подграф графа H с v_1 вершинами и e_1 рёбрами, $e_1/v_1 > e/v$. Пусть α удовлетворяет неравенствам $e/v < \alpha < e_1/v_1$. Положим $p = n^{-\alpha}$. Математическое ожидание числа копий H_1 тогда есть $o(1)$. Поэтому почти всегда $G(n, p)$ не содержит копий графа H_1 . Но если он не содержит копий графа H_1 , то он, конечно, не содержит и копий графа H . ■

Пороговая функция для произвольного подграфа

Замечание 2. Пороговая функция для свойства содержания в случайном графе $G(n, p)$ копий графа H для произвольного H изучалась в классической статье [2] (она всё ещё служит великолепным введением в теорию случайных графов.)

Пусть H_1 — подграф максимальной плотности, т. е. $\rho(H_1) = e_1/v_1$ (если H сбалансирован, можно положить $H_1 = H$). Эрдёш и Реньи показали, что функция $p = n^{-v_1/e_1}$ является пороговой для свойства существования в графе $G(n, p)$ подграфа H . Доказывать этот результат мы здесь не будем, хотя он получается теми же методами.

Закончим лекцию двумя усилениями теоремы 3.

Строго сбалансированный подграф с автоморфизмами

Теорема 5 (без доказательства).

Пусть H — строго сбалансированный граф с v вершинами, e рёбрами и a автоморфизмами. Обозначим через X число копий графа H в $G(n, p)$. Предположим, что $p \gg n^{-v/e}$. Тогда для почти всех графов G выполнено асимптотическое равенство

$$X \sim \frac{n^v p^e}{a}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 6 (без доказательства).

Пусть H — произвольный фиксированный граф. Для каждого подграфа H' графа H (включая сам H) обозначим через $X_{H'}$ число копий графа H' в $G(n, p)$. Пусть p таково, что $E[X_{H'}] \rightarrow \infty$ для каждого H' . Тогда для почти всех графов G выполнено асимптотическое равенство

$$X_H \sim E[X_H], \quad n \rightarrow \infty.$$

Литература к лекции

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, С. 64-70, 178-180.
2. Erdős P. and Rényi (1960) On the evolution of random graphs. // *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató. Int. Közl.* 5: P. 17-61.

Дополнительная литература по случайным графам:

1. Bollobás B. (1985) Random Graphs. // *Academic Press., New York.*
2. Janson S., Luczak T. and Rucinski A. (2000) Random Graphs. // *Wiley, New York.*
3. Райгородский А. М. Модели случайных графов. — 2-е изд., доп. — М.: МЦНМО. 2016.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!