

Лекция 3. Деревья. Остовные деревья. Число остовных деревьев в помеченном полном графе. Достижимость промежуточного числа висячих вершин в остовном дереве. Оценка числа висячих вершин в остовном дереве.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Дерево

Деревом называется связный граф без циклов.

Остовным деревом связного графа называется его подграф со всеми вершинами, являющийся деревом.

Задача о сети

Пусть найдутся p узлов, между некоторыми из которых можно проложить соединения. Как связать все узлы в сеть, чтобы общая протяженность соединений была наименьшей?

Число остовных деревьев в полном графе

Полный граф K_n — граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины соединены ребром.

Теорема 1 (А. Кэли, 1889). *В помеченном полном графе K_n найдется ровно n^{n-2} остовных деревьев.*

Доказательство (Х. Прюфер, 1918). Пусть $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

Для каждого остовного дерева $D = D_1$ графа K_n построим его код $k(D_1) = (j_1, \dots, j_{n-2})$.

Пусть i_1 — висячая вершина с наименьшей пометкой в дереве D_1 . Она смежна с единственной вершиной j_1 .

Повторим рассуждения для дерева $D_2 = D_1 - i_1$ и т. д.

Останавливаемся, когда получим дерево D_{n-1} , являющееся ребром.

Число остовных деревьев в полном графе

Доказательство (продолжение). Пусть получен код $k(D_1) = (j_1, \dots, j_{n-2})$.

Как по нему восстановить дерево D_1 ?

Заметим, что если i не содержится в коде $k(D_1)$, то i — висячая вершина дерева D .

Пусть $V_1 = V$. Выбираем наименьшее число i_1 из V_1 , не содержащееся в $k(D_1)$. Соединяем вершины i_1 и j_1 . Пусть $V_2 = V_1 \setminus \{i_1\}$.

Повторяем рассуждения для множества V_2 и кода (j_2, \dots, j_{n-2}) .

Отметим, что множество V_{n-1} содержит ровно две вершины. Их нужно соединить ребром. Получим дерево D_1 .

Число остовных деревьев в полном графе

Доказательство (продолжение). Значит, число остовных деревьев в графе K_n совпадает с числом кодов (j_1, \dots, j_{n-2}) , где $j_1, \dots, j_{n-2} \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Т. е. число таких остовных деревьев равно n^{n-2} .



Достижимость промежуточного числа висячих вершин

Теорема 2 (С. Чустер, 1983). Пусть D_1 и D^* — два остовных дерева связного графа G с m и n висячими вершинами соответственно ($m < n$). Тогда для каждого числа k , $m < k < n$, в графе G найдется остовное дерево с k висячими вершинами.

Доказательство. Пусть $e_1^* \in E(D^*) \setminus E(D_1)$. Рассмотрим граф $G_1 = D_1 + e_1^*$. В нем найдется единственный простой цикл C_1 . В этом цикле выберем ребро $e_1 \notin D^*$, и положим $D_2 = G_1 - e_1$. Граф D_2 — дерево, повторим для него рассуждения и т. д.

В итоге получим последовательность остовных деревьев D_1, D_2, \dots, D^* .

Заметим, что число висячих вершин в соседних деревьях D_i и D_{i+1} отличается не более, чем на 2.

Достижимость промежуточного числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). Пусть для некоторого k , $m < k < n$, в последовательности остовных деревьев нет дерева с k висячими вершинами.

Значит, найдутся два соседних дерева D_i и D_{i+1} , такие, что в дереве D_i — $(k - 1)$ висячих вершин, а в дереве D_{i+1} — $(k + 1)$ висячих вершин.

Рассмотрим простой цикл C_i в графе G_i . Концы ребра e_i^* имеют степень больше двух, а концы ребра e_i имеют степень два в цикле C_i . Значит, в цикле C_i найдется такое ребро e , что один его конец имеет степень два, а другой его конец имеет степень, большую двух.

Тогда дерево $D = G_i - e$ — остовное дерево с k висячими вершинами в графе G .



Число висячих вершин

Сколько висячих вершин может быть в остовном дереве графа G ?

Предложение 1. *Для каждого связного графа G можно построить остовное дерево, в котором не менее $\Delta(G)$ висячих вершин.*

Доказательство. Построим остовное дерево так: сначала выберем вершину $v \in V$ с $d_G(v) = \Delta(G)$ вместе со всеми исходящими из нее ребрами.

Затем добавим к этой звезде ребра графа G так, чтобы не появились циклы. В итоге получим остовное дерево, в котором не менее $\Delta(G)$ висячих вершин.



Задача о сети с концевыми узлами

Пусть найдутся p узлов, между некоторыми из которых можно проложить соединения. Как связать все узлы в сеть, чтобы число концевых узлов осталось наибольшим (например, к концевым узлам подсоединяются пользователи)?

Оценка числа висячих вершин

Теорема 3 (Д. Клейтман, Д. Вест, 1991). В связном графе $G = (V, E)$ с $\delta(G) \geq 3$ найдется остовное дерево, в котором не менее $\frac{1}{4} \cdot |V|$ висячих вершин.

Доказательство. Опишем алгоритм построения такого остовного дерева.

Пусть дерево D — подграф графа G . Висячую вершину дерева D назовем **устойчивой**, если все смежные с ней вершины принадлежат также дереву D .

Пусть $v(D)$ — число вершин, $u(D)$ — число висячих вершин и $s(D)$ — число устойчивых висячих вершин дерева D .

Положим $\alpha(D) = \frac{3}{4}u(D) + \frac{1}{4}s(D) - \frac{1}{4}v(D)$.

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение).

Остовное дерево будем строить по индукции.

Базис индукции: выберем в графе G произвольную вершину v . Пусть дерево D_1 состоит из вершины v вместе со всеми исходящими из нее ребрами и их вторыми концами.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = \frac{3}{4}u(D) + \frac{1}{4}s(D) - \frac{1}{4}v(D)$ и $d_G(v) \geq 3$, верно

$$\alpha(D_1) \geq \frac{3}{4}d_G(v) - \frac{1}{4}(d_G(v) + 1) = \frac{1}{2}d_G(v) - \frac{1}{4} \geq \frac{5}{4} > 0.$$

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). Пусть уже построено дерево D_i , и $W = V \setminus V(D_i)$.

1. Если в дереве D_i есть невисячая вершина v , смежная с некоторой вершиной $w \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = \frac{3}{4}u(D) + \frac{1}{4}s(D) - \frac{1}{4}v(D)$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Оценка числа висячих вершин

2. Иначе, если в дереве D_i есть вершина v , смежная с хотя бы с двумя вершинами $w_1, w_2 \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w_1) + (v, w_2)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = \frac{3}{4}u(D) + \frac{1}{4}s(D) - \frac{1}{4}v(D)$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geq \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Оценка числа висячих вершин

3. Иначе, если в множестве W есть вершина w , смежная с какой-то вершиной v дерева D_i и хотя бы двумя вершинами $w_1, w_2 \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w) + (w, w_1) + (w, w_2)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = \frac{3}{4}u(D) + \frac{1}{4}s(D) - \frac{1}{4}v(D)$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geq \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Оценка числа висячих вершин

4. Иначе, в множестве W есть вершина w , смежная с вершинами дерева D_i . т. к. п. 3 не выполняется, то вершина w смежна не более, чем с одной вершиной из множества W . Но $d_G(v) \geq 3$, поэтому вершина w смежна хотя бы с двумя вершинами $v, v_1 \in V(D_i)$. Пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w)$. т. к. п.п. 1–2 не выполняются, вершина v_1 — висячая в дереве D_i и смежна ровно с одной вершиной из множества W , а именно, с вершиной w . Поэтому в дереве D_{i+1} висячая вершина v_1 — устойчивая.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = \frac{3}{4}u(D) + \frac{1}{4}s(D) - \frac{1}{4}v(D)$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Оценка числа висячих вершин

5. Если п.п. 1–4 неприменимы, то остовное дерево D построено.

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). В остовном дереве D все висячие вершины устойчивые.

Поэтому, т. к. $\alpha(D) = \frac{3}{4}u(D) + \frac{1}{4}s(D) - \frac{1}{4}v(D)$, верно

$$\alpha(D) = u(D) - \frac{1}{4}v(D).$$

Или

$$u(D) = \frac{1}{4}v(D) + \alpha(D).$$

Но $\alpha(D) \geq \alpha(D_1) > 0$, т. к. на каждом шаге построения мы только увеличивали этот параметр.

Получаем, что

$$u(D) \geq \frac{1}{4} \cdot |V|.$$



Краткий итог лекции

1. В любом связном графе найдется остовное дерево с промежуточным числом висячих вершин (относительно двух других его остовных деревьев).
2. В любом связном графе G с $\delta(G) \geq 3$ найдется остовное дерево, в котором не менее четверти вершин — висячие.
3. Остовные деревья в п. п. 1–2 можно найти быстрыми (полиномиальными) алгоритмами.

Задачи

1. Найти все неизоморфные остовные деревья в графе G , если:

1) $G = K_3$;

2) $G = K_4$;

3) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4 ;

4) $G = K_5$.

Изобразить эти неизоморфные остовные деревья.

2. Построить пример связного графа G_n с n вершинами, $n = 4m$, $m \geq 1$, в котором степени всех вершин равны 3 и любое остовное дерево содержит не более $m + 2$ висячих вершин.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 59.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 183.
3. Оре О. Теория графов. М.: Мир, 1980. С. 77–80.