

# Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Весенний семестр 2017–2018 уч. г.  
группы 320–328

лектор — доцент Д. С. Романов  
(d\_s\_romanov@mail.ru)

Информационная поддержка курса:  
[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы\\_кибернетики\\_\(3-й\\_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток))

# Аудиторная нагрузка и формы контроля

Группы	Лекции	Семинары	
320–328	48 часов	16 часов	Экзамен

---

**Контрольные** 4 основных (по 2 часа) и ряд текущих

---

**Предварительная оценка** по итогам тестов с учётом посещаемости и самостоятельной работы

---

**Итоговая оценка** выставляется на экзамене, не больше чем предварительная + 1 балл.

---

# Материалы

Программа курса и литература

Предварительный список вопросов

Типы задач и планы семинарских занятий

График проведения тестов-контрольных

Текущие результаты

Организация аудиторной и самостоятельной работы

Проведение экзамена и др.

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/  
Основы\\_кибернетики\\_\(3-й\\_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток))

# Введение

## **Курс «Основы кибернетики»**

(ранее «Элементы кибернетики») читается с 1971 г.

Создатель и основной лектор (до 1998 г.) — чл.-корр.

РАН С. В. Яблонский

**Кибернетика** — наука об управлении

(Н. Винер, 1948 г.)

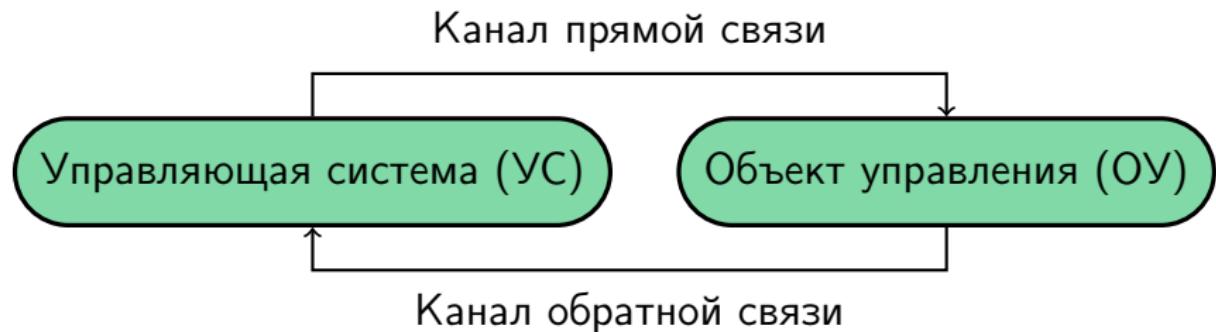
**Кибернетика** — наука об общих законах хранения, получения, преобразования и передачи информации в сложных системах управления

(С.В. Яблонский, 1959 г.)

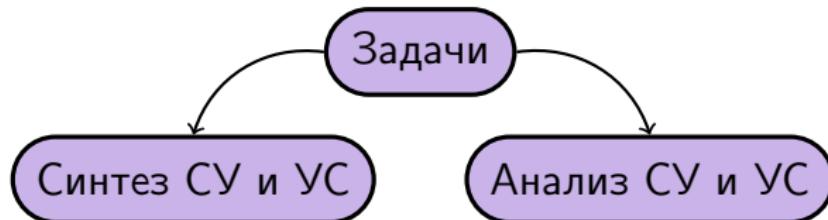
**Математическая кибернетика** —

математические модели и методы исследования  
сложных систем управления

# Система управления (СУ)



Функционирование СУ — круговорот информации: УС → ОУ → УС → ...



# Построение (синтез) СУ

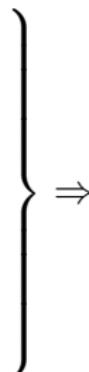
Закон поведения и управляемости ОУ

Цель управления

Класс функций управления

Класс (тип) УС

Критерий качества



1. Выбор оптимальной функции управления из данного класса (синтез управления)
2. Построение (синтез) оптимальной УС заданного типа (программа, СБИС, механическое устройство и др.)
3. Оценка качества построенной СУ, а затем, возможно, коррекция классов и переход к п. 1

- ▶ Курс посвящён основным моделям, методам и результатам математической кибернетики, связанным с теорией дискретных управляемых систем (ДУС), задачей их анализа и синтеза
- ▶ Продолжает курс дискретной математики, использует некоторые результаты математического анализа, теории вероятностей и др.
- ▶ Является сложным и объемным математическим курсом, усвоение которого требует систематической аудиторной и самостоятельной работы

# Основные разделы курса

- I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи
- II. Основные классы ДУС, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования УС
- III. Синтез и сложность УС
- IV. Надёжность и контроль УС
- V. Некоторые вопросы и классы схем, связанные с программно-аппаратной реализацией алгоритмов

# Основные сферы применения результатов курса

- ▶ Схемная и структурная реализация дискретных функций и алгоритмов, оценки её сложности
- ▶ Различные задачи программно-аппаратной реализации алгоритмов
- ▶ Разработка методов автоматизации проектирования заказных СБИС, программирование FPGA и др.

# I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи

1. Представление функций  
алгебры логики (ФАЛ)  
дизъюнктивными  
нормальными формами  
(ДНФ) и его  
«геометрическая»  
интерпретация. Совершенная  
ДНФ и критерий  
единственности ДНФ

**Утверждение 1.1.** Совершенная ДНФ ФАЛ  $f$ ,  $f \not\equiv 0$ ,  $f \in P_2(n)$ , является единственной ДНФ от БП  $X(n)$ , которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве  $N_f$  нет соседних наборов.

**Следствие.** Совершенная ДНФ ФАЛ  $\ell$ ,  $\bar{\ell}$ , является единственной ДНФ этой ФАЛ от БП  $X(n)$ .

## 2. Сокращенная ДНФ и способы ее построения

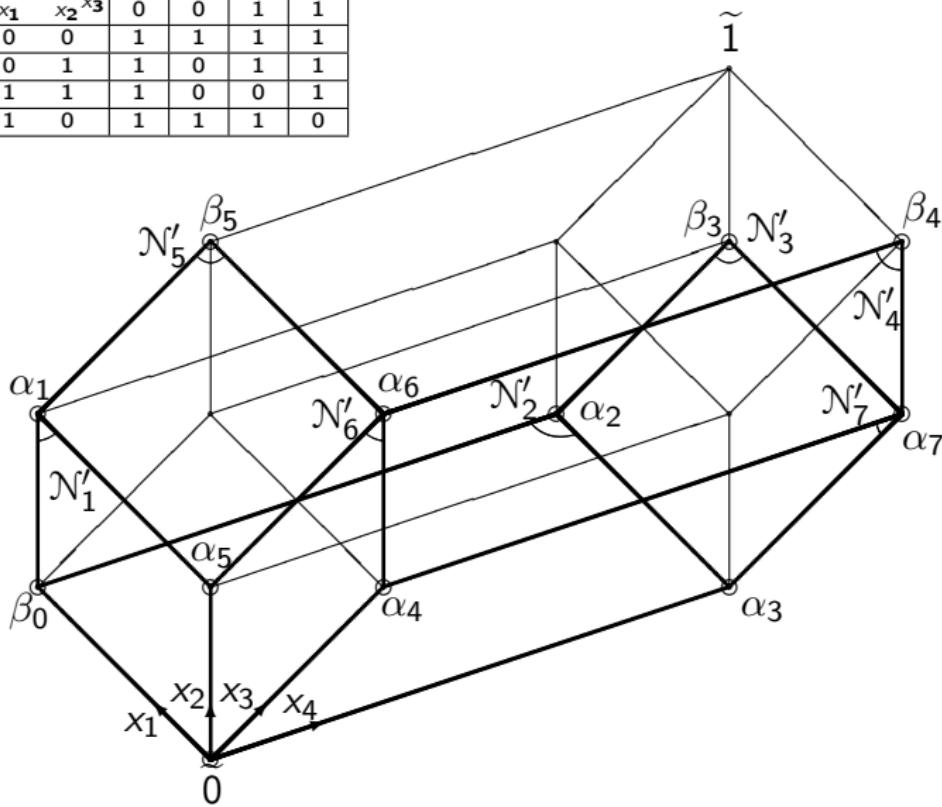
**Утверждение 2.1.** Пусть  $\mathfrak{A}'$  и  $\mathfrak{A}''$  – сокращенные ДНФ ФАЛ  $f'$  и  $f''$  соответственно, а ДНФ  $\mathfrak{A}$  без поглощений ЭК получается из формулы  $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$  в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда  $\mathfrak{A}$  – сокращенная ДНФ ФАЛ  $f = f' \cdot f''$ .

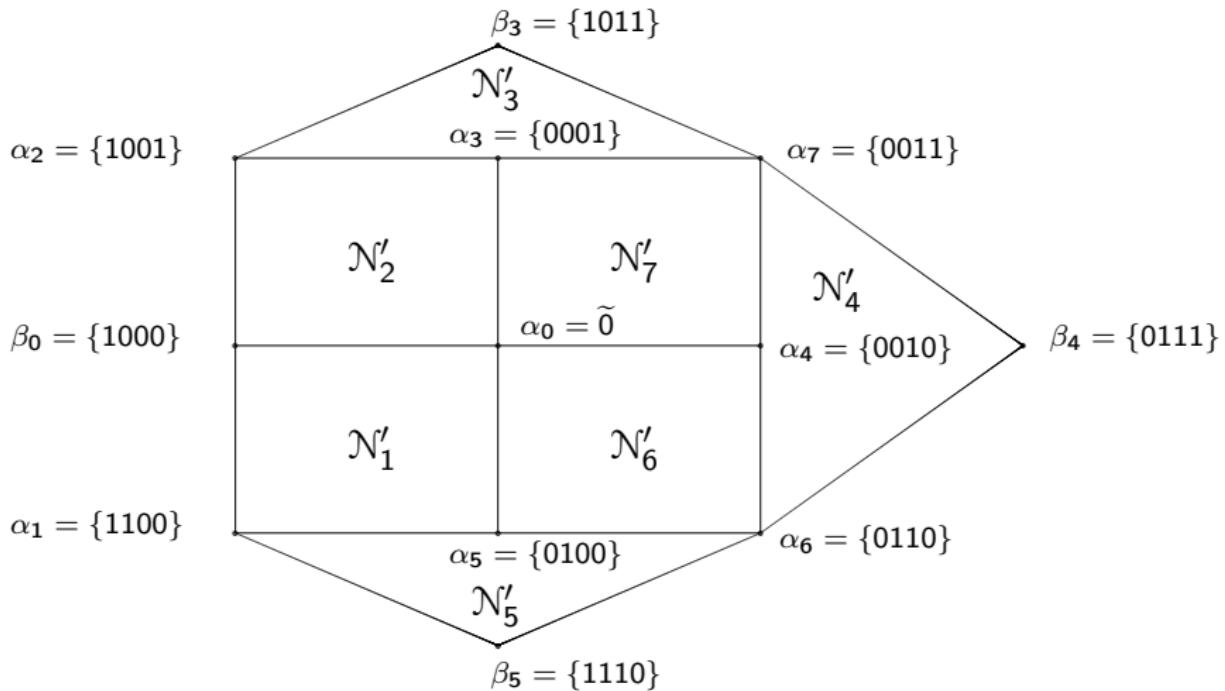
**Следствие.** Если ДНФ  $\mathfrak{A}$  без поглощений ЭК получается из КНФ  $\mathfrak{B}$  ФАЛ  $f$  в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то  $\mathfrak{A}$  – сокращенная ДНФ ФАЛ  $f$ .

**Утверждение 2.2.** ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

**Следствие.** Из любой ДНФ  $\mathfrak{A}$  ФАЛ  $f$  можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

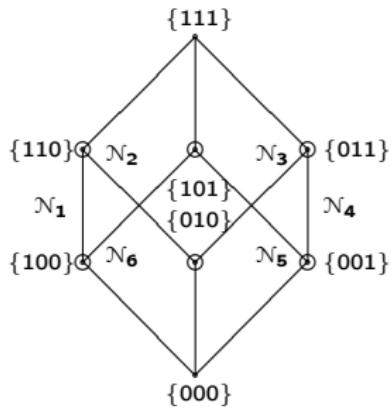
		$x_4$	0	1	1	0
$x_1$	$x_2$	$x_3$	0	0	1	1
0	0		1	1	1	1
0	1		1	0	1	1
1	1		1	0	0	1
1	0		1	1	1	0





$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$

$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1 \bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2 \bar{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\bar{x}_2 x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_2}_{K_6}.$$



$$\overline{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

3. Тупиковые ДНФ, ядро и  
ДНФ пересечение тупиковых.  
ДНФ Квайна, критерий  
вхождения простых  
импликант в ДНФ сумма  
тупиковых, его локальность

**Утверждение 3.1.** Дизъюнктивная нормальная форма  $\cap T$  ФАЛ  $f$  состоит из тех простых импликант ФАЛ  $f$ , которые соответствуют ядовым граням этой ФАЛ.

**Следствие.** Сокращенная ДНФ ФАЛ  $f$  является ее единственной тупиковой ДНФ тогда и только тогда, когда  $f$  — ядровая ФАЛ, т.е. все ее максимальные грани входят в ядро.

**Утверждение 3.2.** Простая импликанта  $K$  ФАЛ  $f$  входит в ДНФ  $\Sigma T$  тогда и только тогда, когда грань  $N_K$  не является регулярной гранью этой ФАЛ.

# 4. Особенности ДНФ линейных и монотонных функций. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ

**Утверждение 4.1.** Сокращенная ДНФ  $\mathfrak{A}$  монотонной ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+(x_1, \dots, x_n).$$

При этом все наборы из  $N_f^+$  являются ядовыми точками ФАЛ  $f$ .

**Следствие.** Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

**Утверждение 4.2.** Функция покрытия  $F(y_1, \dots, y_p)$  матрицы  $M$ ,  $M \in B^{p,s}$ , без нулевых столбцов задается КНФ вида:

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left( \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M(i,j)=1}} y_i \right).$$

**Следствие.** В результате раскрытия скобок и приведения подобных из этой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ  $F(y)$ , простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы  $M$ .

## 5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о протыкающих наборах.

Использование градиентного  
алгоритма для построения  
ДНФ

**Утверждение 5.1** Пусть для действительного  $\gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ , в каждом столбце матрицы  $M$ ,  $M \in B^{p,s}$ , имеется не меньше, чем  $\gamma \cdot p$ , единиц. Тогда покрытие матрицы  $M$ , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

где  $\ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geq 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$

**Утверждение 5.2** При любых  
натуральных  $n$  и  $m$ ,  $m \leq n$ , в кубе  $B^n$  всегда  
найдется подмножество мощности не более,  
чем  $n \cdot 2^m$ , проникающее все грани ранга  $m$ .

# 6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функций Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ

**Утверждение 6.1** Для любого  $n, n \in \mathbb{N}$ , имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

**Утверждение 6.2** Для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , выполняются неравенства

$$\lambda(f) \leq \frac{3}{4} 2^{n-1} \left(1 + O\left(n \cdot 2^{-n/2}\right)\right),$$

$$R(f) \leq \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} \left(1 + O\left(n \cdot 2^{-n/2}\right)\right).$$

7. Алгоритмические  
трудности минимизации ДНФ  
и оценки максимальных  
значений некоторых  
связанных с ней параметров.  
Теорема Ю. И. Журавлева о  
ДНФ сумма минимальных

**Утверждение 7.1** Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ  $f$  из  $P_2(n)$ ,  $n \geq 4$ , вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \dots \oplus x_n),$$

где  $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$ , равно  $5^{2^{n-4}}$  (соответственно  $2^{2^{n-4}}$ ).

**Следствие**

$$\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}, \quad \mu(n) \geq 2^{2^{n-4}}.$$

## Утверждение 7.2

$$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geq e_1 \frac{3^n}{n},$$

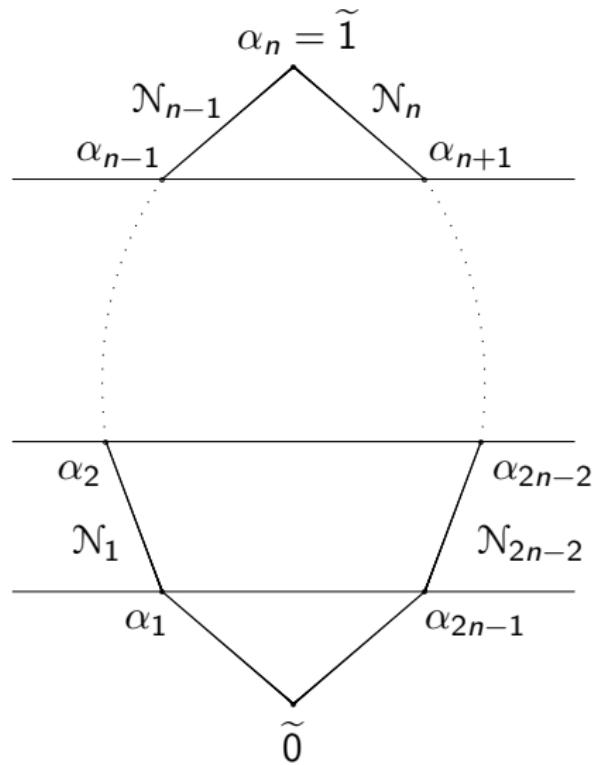


Рис.: цепная ФАЛ длины  $(2n - 2)$  в кубе  $B^n$

где  $e_1$  — некоторая константа.

**Утверждение 7.3** При любом  
 $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , в  $P_2(n)$  существуют ФАЛ  $f'$  и  
 $f''$ , имеющие общую простую импликанту  $K$ ,  
которая входит в ДНФ  $\Sigma M$  одной, но не  
входит в ДНФ  $\Sigma M$  другой из этих ФАЛ и  
для которой  $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$ .

**Замечание 1** Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ  $\Sigma M$  не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ  $\Sigma T$ .

**Замечание 2** Известно, что при  $n \geq 14$  в  $P_2(n)$  имеется цепная ФАЛ четной длины  $t$ ,  $t \geq 2^{n-11} - 4$ , на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка  $(\frac{t}{2} - 2)$ .

## II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

# 8 Формулы алгебры логики, их эквивалентные преобразования с помощью тождеств. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

$$\tau^{\text{och}} = \{ t_{\&}^M, t_{\neg}^M, t_{\&}^A, t_{\&}^K, t_{\&}^{\text{O}\Pi}, t_{\&,\vee}^D, t_{1,\&}^{\Pi K}, t_{0,\&}^{\Pi K} \},$$

$$\tau^A = \{ t_{\&}^A, t_{\vee}^A \},$$

$$\tau^K = \{ t_{\&}^K, t_{\vee}^K \},$$

$$\tau^{\text{O}\Pi} = \{ t_{\&}^{\text{O}\Pi}, t_{\vee}^{\text{O}\Pi} \},$$

$$\tau^D = \{ t_{\&,\vee}^D, t_{\vee,\&}^D \},$$

$$\tau^{\Pi K} = \{ t_{0,\&}^{\Pi K}, t_{1,\&}^{\Pi K}, t_{0,\vee}^{\Pi K}, t_{1,\vee}^{\Pi K} \},$$

$$\tilde{\tau}^{\text{och}} = \{ \tau^M, \tau^A, \tau^K, \tau^{\text{O}\Pi}, \tau^D, \tau^{\Pi K}, t^\Pi \}.$$

**Утверждение 8.1** Система  $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$  выводима из системы  $\tau^{\text{осн}}$ .

**Утверждение 8.2** Любую формулу  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ , реализующую ФАЛ  $f$ , с помощью ЭП на основе системы тождеств  $\tau^{\text{осн}}$  можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ  $f$  от БП  $X(n)$ .

**Утверждение 8.3** Система  $\tau^{\text{осн}}$  — полная система тождеств.

9. Задание формул с  
помощью деревьев,  
функционалы их сложности и  
соотношения между ними.  
Оптимизация подобных  
формул по глубине

**Утверждение 9.1** Для формулы  $\mathcal{F}$ ,  
 $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$ , вида  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \dots \circ \mathcal{F}_k$ , где  
 $\circ \in \{\&, \vee\}$ , выполняются неравенства

$$\begin{aligned} R(\mathcal{F}) &= L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq \\ &\leq 2^{D(\mathcal{F}_1)} + \dots + 2^{D(\mathcal{F}_k)} \leq 2^{D(\mathcal{F})}, \end{aligned}$$

где  $L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$  – число  $\Phi C$   $\&$  и  $\vee$  в формуле  $\mathcal{F}$ .

**Следствие**

$$\begin{aligned} D(\mathcal{F}) &\geq \lceil \log(2^{D(\mathcal{F}_1)} + \dots + 2^{D(\mathcal{F}_k)}) \rceil \geq \\ &\geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil. \end{aligned}$$

**Утверждение 9.2** Для любой формулы  $\mathcal{F}$  с поднятыми отрицаниями из  $\mathcal{U}^\Phi$  существует подобная ей формула  $\check{\mathcal{F}}$  такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}).$$

**Следствие 1.** Для любой ЭК или ЭД  $K$  существует подобная ей формула  $\check{K}$  такая, что

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$

которая, минимальна по глубине.

**Следствие 2.** Для любой ДНФ или КНФ  $\mathfrak{A}$  существует подобная ей формула  $\check{\mathfrak{A}}$  такая, что

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

# 10. Схемы из функциональных элементов.

Изоморфизм и  
эквивалентность схем,  
функционалы их сложности,  
операции приведения.  
Верхние оценки числа  
формул и схем в базисе

$$\{\&, \vee, \neg\}$$

**Утверждение 10.1** Для приведенной СФЭ  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}^C$ , с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)},$$

где  $L_{\&, \vee}$  — число ФЭ  $\&$  и  $\vee$  в  $\Sigma$ .

**Утверждение 10.2** Для любых  
натуральных  $n, L, D$  выполняются  
неравенства

$$|\mathcal{U}^\Phi(L, n)| \leq (10n)^{L+1},$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1},$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| \leq (8n)^{2^D}.$$

**Следствие** Число попарно не коммутативно подобных формул с поднятыми отрицаниями ранга  $R$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  не больше, чем  $(12n)^R$ .

**Утверждение 10.3** Для любых натуральных  $n$  и  $L$  выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L + n))^{L+1}.$$

11. Контактные схемы (КС) и  
 $\pi$ -схемы, их изоморфизм,  
эквивалентность, сложность,  
операции приведения.

Структурное моделирование  
формул и  $\pi$ -схем. Оценки  
числа КС и числа  $\pi$ -схем.

Особенности  
функционирования  
многополюсных схем

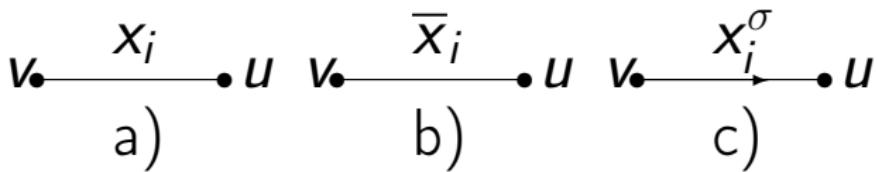


Рис. 1: типы контактов

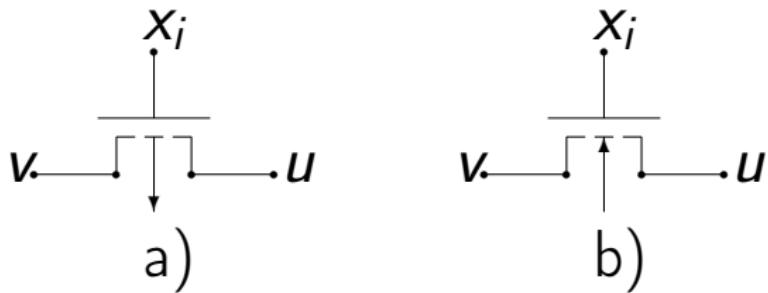
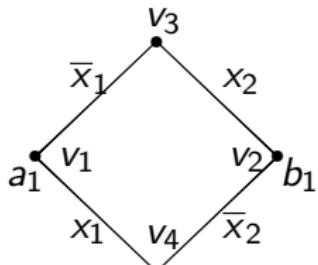
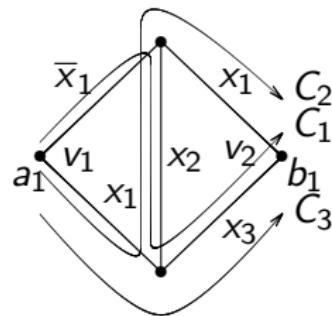


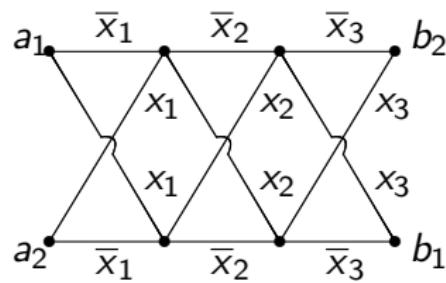
Рис. 2: физическая интерпретация контактов



a)



b



c)

Рис. 3: некоторые КС от БП  $x_1, x_2, x_3$

**Утверждение 11.1** Любой  $\pi$ -схеме  $\Sigma$  можно сопоставить эквивалентную ей формулу  $\mathcal{F}$  из  $\mathcal{U}^\Phi$  с поднятыми отрицаниями такую, что  $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$  и обратно.

**Утверждение 11.2** При любых натуральных  $L$  и  $n$  выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L.$$

**Утверждение 11.3** При любых  
натуральных  $L$  и  $n$  выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

# 12. Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований.

Моделирование  
эквивалентных  
преобразований формул и  
схем в различных базисах,  
теорема перехода

**Утверждение 12.1** Если  $\tau$  — конечная полная система тождеств для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , то  $\{\perp, \tau^C, \tau^B\}$  — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из  $\mathcal{U}_B^C$

**Следствие** Система тождеств  $\{\perp^{och}, \tau^B, \tau^C\}$  — КПСТ для ЭП СФЭ из  $\mathcal{U}^C$ .

**Утверждение 12.2** Пусть  $\tau$  — КПСТ для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , а  $\Pi'$  и  $\Pi$  — системы тождеств для перехода от базиса  $B$  к базису  $B'$  и от базиса  $B'$  к базису  $B$  соответственно. Тогда система тождеств  $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$  является КПСТ для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ .

**Следствие** Из системы тождеств  $\tau^{\text{осн}}$  для ЭП формул из  $\mathcal{U}^\Phi$  указанным в утверждении способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе  $B$ .

# 13. Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств

**Утверждение 13.1** Имеет место выводимость  $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \not\Rightarrow \{t_7 - t_{11}\}$ .

**Утверждение 13.2** При  $n \geq 2$  имеет место выводимость  $\tau_n \not\Rightarrow \tau^{(n)}$ .

# 14. Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

**Утверждение 14.1** Для любой КС  $\Sigma$ , где  
 $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{U}^K$ , и  
любой эквивалентной  $\Sigma$  КС  
 $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$  канонического  
вида существует ЭП  $\Sigma \Rightarrow \widehat{\Sigma}$ .

$\tau_n$

**Утверждение 14.2** Для любых двух эквивалентных КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  существует ЭП вида  $\Sigma' \rightrightarrows \Sigma''$ .

$\tau_n$

**Следствие** Система  $\tau_n$  является КПСТ для ЭП КС из  $\mathcal{U}^K$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ .

**Следствие** Система  $\tau_\infty$  является ПСТ для ЭП КС из  $\mathcal{U}^K$ .

**Утверждение 14.3** Если  
 $\Sigma' (x_1, \dots, x_n) \stackrel{\{t_1 - t_5\}}{\Rightarrow} \Sigma'' (x_1, \dots, x_n)$ , то  
 $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$ , а если  $\Sigma' \stackrel{\tau_k}{\Rightarrow} \Sigma''$ , где  $k < n$ ,  
то  $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$  делится на  $2^{n-k}$ .

**Утверждение 14.4** В классе  $\mathcal{U}^K$  не существует конечной полной системы тождеств.

# III. Синтез и сложность управляющих систем

# 15. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций

**Утверждение 15.1** Для любой функции алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f \neq 0$ , существуют формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , и  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$ , которые реализуют  $f$  и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|,$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leq \lceil \log(n \cdot |N_f|) \rceil + 2.$$

**Следствие 1.** В силу указанных неравенств, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать  $\pi$ -схемой сложности 2, а также формулой из  $\mathcal{U}^\Phi$ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства

$$L^C(n) \leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1,$$

$$L^K(n) \leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n.$$

**Следствие 2.**

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

**Утверждение 15.2** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$  и  $f \neq 0$ , существуют  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$  и формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , которые реализуют  $f$  и для которых справедливы неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2,$$

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

**Следствие**

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2,$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4.$$

Функции, встречающиеся в приложениях:

1. линейная ФАЛ порядка  $n$ , то есть ФАЛ  $\ell_n$  или ФАЛ  $\bar{\ell}_n$ ;
2. мультиплексорная ФАЛ  $\mu_n$  порядка  $n$ ;
3. дешифратор  $\overrightarrow{Q}_n$  (дизъюнктивный дешифратор  $\overrightarrow{J}_n$ ) порядка  $n$ ;
4. универсальная система  $\overrightarrow{P}_2(n)$  порядка  $n$ , состоящая из всех различных ФАЛ множества  $P_2(n)$ , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

**Утверждение 15.3** Для любого натурального  $n$  в  $\mathcal{U}_B^C$  существует универсальная СФЭ порядка  $n$ , сложность которой равна  $2^{2^n} - n$ .

**Следствие**

$$L_B^C(\overrightarrow{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

# 16. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем

**Утверждение 16.1** Если ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  существенно зависит от всех своих БП, то

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n.$$

Если при этом ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ (каждая БП  $x_i, i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ ), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n+k).$$

## Следствие

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

**Утверждение 16.2** Для системы  
 $F = (f_1, \dots, f_m)$ , состоящей из попарно  
различных ФАЛ отличных от констант (от  
переменных), справедливо неравенство

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно} L_B^C(F) \geq m).$$

## Следствие

$$L^C(\vec{Q}_n) \geq 2^n,$$

$$L^C(\vec{J}_n) \geq 2^n,$$

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \geq 2^{2^n} - n, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \geq 2^{2^n} - 2$$

**Замечание** В силу следствия  
универсальная СФЭ  $U_n$ , построенная в  
утв. 15.3, является минимальной по  
сложности СФЭ в классе  $\mathcal{U}_B^C$ .

**Утверждение 16.3** Если для существенной БП  $x_n$  ФАЛ  $f \in P_2(n)$ , и для любого (некоторого)  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$ , то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=0}), L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=1})\} + 2$$

(соответственно  $L_{\&, \vee}^C(f) \geq L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=\sigma}) + 1$ ).

## Следствие

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1,$$
$$D(\mu_n) \geq n + 2.$$

**Утверждение 16.4** Если система ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  состоит из попарно различных ФАЛ от БП  $X(n)$ , отличных от 0 и 1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

**Следствие**  $L^K(\overline{J}_n) \geq 2^{n+1} - 2$

**Утверждение 16.5** Для любого натурального  $n$  выполняются неравенства:

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \lfloor 1/n \rfloor;$$

$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3;$$

$$L^C(\overrightarrow{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}), \quad L^K(\overrightarrow{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2;$$

$$L^C(\overrightarrow{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}).$$

**Следствие**

$$L^C(\overrightarrow{Q}_n) \sim L^C(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^n.$$

# 17. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

**Утверждение 17.1.** Пусть КС  $\Sigma$  является результатомстыковки вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ , а  $F$ ,  $F'$  и  $F''$  – матрицы, реализуемые КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно. Тогда

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'',$$

если КС  $\Sigma''$  разделительна по входам или КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам.

**Следствие 1.** В случае разделительности КС  $\Sigma''$  по входам в каждой вершине КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ , которая соответствует выходу КС  $\Sigma'$ , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС  $\Sigma'$ .

**Следствие 2.** Равенство  $F = F' \cdot F''$  выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС  $\Sigma''$  разделительна по входам или КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам.

**Замечание.** Отождествление входов (выходов) у разделительной по входам (выходам) КС дает разделительную по рассматриваемой группе полюсов КС.

# 18. Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения, метод Шеннона

**Утверждение 18.1** Если  $(1, m)$ -ККС  $\Sigma'$  реализует систему ФАЛ  $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$ , то существует  $(1, m)$ -ККС  $\Sigma''$ , которая реализует систему ФАЛ  $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$  и для которой  $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$ .

**Утверждение 18.2** Для любого натурального  $n$  и  $\sigma \in B$  выполняются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\overrightarrow{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$
$$L^K(\overrightarrow{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

**Утверждение 18.3** Для функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$  выполнены соотношения:

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

# 19. Нижние мощностные оценки функций Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для ФАЛ из специальных классов

**Утверждение 19.1** Для некоторых последовательностей  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$ , где  $i = 1, \dots, 4$ , и  $n = 1, 2, \dots$ , таких, что  $\varepsilon_i(n) \geq 0$  при  $n \geq n_0$  и  $\varepsilon_i(n)$  стремится к 0 при  $n$  стремящемся к бесконечности для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , выполняются неравенства:

$$L^K(f) \geq \left(1 - \varepsilon_1(n)\right) \frac{2^n}{n}, \quad L^C(f) \geq \left(1 + \varepsilon_2(n)\right) \frac{2^n}{n},$$
$$L^\Phi(f) \geq \left(1 - \varepsilon_3(n)\right) \frac{2^n}{\log n}, \quad D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon_4(n).$$

## Следствие

$$D(n) \geq \lceil n - \log \log n - o(1) \rceil,$$

$$L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n},$$

$$L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

## Утверждение 19.2

Для класса ФАЛ  $\mathcal{Q}$  такого, что

$$n = o\left(\frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}\right)$$
$$(\log n = o(\log \log |\mathcal{Q}(n)|)),$$

выполняются асимптотические неравенства

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}$$

(соответственно  $L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}.$ )

# 20. Дизъюнктивно- универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

**Утверждение 20.1** Для любых натуральных  $p$ ,  $m$  и  $s$ , где  $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$ , существует стандартное ДУМ  $G$  порядка  $m$  и высоты  $s$ , которое является ДУМ ранга  $p$  и для которого:

- 1)  $\lambda = |G| \leq p2^s$ ;
- 2) система из  $p$  характеристических ФАЛ  $\psi_1, \dots, \psi_p$  ДУМ  $G$  обладает тем свойством, что для любой ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , и соответствующих ФАЛ  $g_1, \dots, g_p$  из  $G$  справедливы представления

$$g = g_1 \vee \cdots \vee g_p = \psi_1 g_1 \vee \cdots \vee \psi_p g_p.$$

**Утверждение 20.2** Для любой ФАЛ  $f$ ,  
 $f \in P_2(n)$ , существует реализующая её СФЭ  
 $\Sigma_f$ ,  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ , такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right).$$

**Следствие.** Из этого утверждения с учетом  
следствия из утверждения 20.1 вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

## 21. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными.

Асимптотически наилучший  
метод синтеза формул в  
базисе  $\{\&, \vee, \neg\}$ .

**Утверждение 21.1** Для любых натуральных  $m$ ,  $\lambda$  и  $q = m + \lambda$  и для любой системы ФАЛ  $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$  из  $P_2^\lambda(m)$  существует  $m$ -регулярное разбиение  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$  куба  $B^q$  такое, что любая ФАЛ  $g_i$  на любой компоненте  $\delta_j$  совпадает либо с одной из БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ , либо с ее отрицанием.

**Замечание.** Если в условиях утверждения  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j - 1)$ , то  $g_i \equiv x_{i+m}^{\overline{\alpha_j}}$  на  $\delta_j$ .

**Утверждение 21.2** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , в  $\mathcal{U}^\Phi$  существует реализующая ее формула  $\mathcal{F}_f$ , для которой

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left( 1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n} \right),$$

$$D(\mathcal{F}_f) \leq n - \log \log n + O(1).$$

**Следствие.** Из этих оценок с учетом нижних оценок следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}, \quad D(n) \leq n - \log \log n + O(1).$$

## 22. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых специальных классов

**Утверждение 22.1** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , существует реализующая ее КС  $\Sigma_f$  такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

**Следствие.** Из этой оценки с учетом нижней оценки следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

**Замечание.** Построенную КС  $\Sigma_f$  можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.

23. Синтез схем для  
десифраторов и  
мультиплексоров,  
асимптотически точные  
оценки их сложности.

**Утверждение 23.1** Для  $n = 1, 2, 3, \dots$  выполняются неравенства

$$L^K(\overrightarrow{Q}_n) \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$L^K(\overrightarrow{J}_n) \leq 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

**Следствие.** Оценки утверждения 23.1 и следствия из следствия из утверждений 16.2, 16.4 дают асимптотические равенства

$$L^K(\vec{Q}_n) \sim 2^n, \quad L^K(\vec{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

**Утверждение 23.2** Для  $n = 1, 2, \dots$  выполняются неравенства

$$L^\pi(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(2^n/n),$$

$$L^C(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(2^n/n),$$

$$D(\mu_n) \leq n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ  $\mu_n$  и бесповторная по информационным БП формула  $\mathcal{M}_n$  с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит  $7 \cdot 2^n$ .

**Следствие.** Из полученных оценок в силу следствий из утверждения 16.3 вытекает, что

$$L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}, \quad D(\mu_n) = n + O(1).$$

# IV. Надёжность и контроль управляющих систем

## 24. Самокорректирующиеся контактные схемы и методы их построения.

Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем, корректирующих один обрыв (одно замыкание)

**Утверждение 24.1** Для любых  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$  и любой КС  $\Sigma$  существует эквивалентная ей КС  $\Sigma'$ ,  $\Sigma' \in \mathcal{U}_{(p,q)}^K$ , для которой

$$L(\Sigma') \leq (p+1)(q+1)L(\Sigma)$$

**Утверждение 24.2** Для любой КС  $\Sigma$  существуют эквивалентные ей  $(1, 0)$ - и  $(0, 1)$ -самокорректирующиеся КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно такие, что

$$L(\Sigma') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma), \quad L(\Sigma'') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma)$$

**Утверждение 24.3** Для  $n = 1, 2, \dots$

имеют место следующие асимптотические равенства:

$$L_{(1,0)}^K(n) \sim L_{(0,1)}^K(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

**Утверждение 24.4** Для  $n = 1, 2, \dots$

имеют место равенства

$$L_{(1,0)}^K(\ell_n) = L_{(1,0)}^K(\bar{\ell}_n) = 4n.$$

## 25. Задача контроля схем и тесты для таблиц.

Построение всех тупиковых  
тестов, оценки длины  
диагностического теста

**Утверждение 25.1** Функция теста  $f(y_1, \dots, y_p)$  для отдельной по столбцам матрицы  $M$ ,  $M \in B^{p,s}$ , и цели контроля  $\mathcal{N}$  может быть задана с помощью КНФ

$$f(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{N}} \left( \bigvee_{\substack{1 \leq t \leq p \\ M_{t,i} \neq M_{t,j}}} y_t \right)$$

**Следствие.** Каждая элементарная конъюнкция вида  $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$  сокращенной ДНФ функции  $f(y_1, \dots, y_p)$ , получающаяся из этой КНФ в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством  $T = \{t_1, \dots, t_r\}$  и обратно.

**Утверждение 25.2** Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества  $B^{p,s}$  заключена в пределах от  $\lceil \log s \rceil$  до  $(s - 1)$ .

**Утверждение 25.3** Пусть  $\varphi(s)$ ,  $t(s)$  и  $p(s)$  — целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента  $s$ , для которых

$$t(s) = \lceil 2 \log s \rceil + \varphi(s), \quad p(s) \geq t(s), \\ \varphi(s) \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из  $B^{p(s),s}$  первые  $t(s)$  строк образуют диагностический тест.

**Следствие** Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции  $\varphi(s)$  у почти всех отделимых по столбцам матриц из  $B^{p,s}$  длина минимального диагностического теста не больше, чем  $2 \log s + \varphi(s)$ .

# V. Некоторые вопросы и классы схем, связанные с программно-аппаратной реализацией алгоритмов

26. Некоторые модификации основных классов схем (BDD, вычисляющие программы, схемы на КМОП-транзисторах и др.), связанные с программно-аппаратной реализацией ФАЛ.

# 27. Реализация автоматных функций схемами из функциональных элементов и элементов задержки, схемы с «мгновенными» обратными связями.

## 28. Задачи логического и топологического синтеза СБИС, основные этапы и методы их решения.