Модели вычислений

В.А. Захаров, Р.И. Подловченко

Лекция 2.

1. Алгоритм преобразования конечного автомата к детерминированному виду.
2. Замкнутость класса автоматных языков относительно операций над языками.
3. Теорема о разрастании для автоматных языков.
4. Примеры неавтоматных языков.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

НАСКОЛЬКО СУЩЕСТВЕННО ВЛИЯЕТ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННОСТЬ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ НА ИХ СПОСОБНОСТЬ РАСПОЗНАВАТЬ ЯЗЫКИ?

МОЖЕМ ЛИ МЫ ОГРАНИЧИТЬСЯ ТОЛЬКО ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ АВТОМАТАМИ?

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Теорема 2.1. Для любого конечного автомата $\mathcal{A}$ существует эквивалентный ему детерминированный конечный автомат $\mathcal{B}$.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Теорема 2.1. Для любого конечного автомата $\mathcal{A}$ существует эквивалентный ему детерминированный конечный автомат $\mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (\Sigma, S, I, F, T)$, где $I, F \subseteq S$ и $T \subseteq S \times \Sigma \times S$, — конечный автомат без ε -переходов.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Теорема 2.1. Для любого конечного автомата $\mathcal{A}$ существует эквивалентный ему детерминированный конечный автомат $\mathcal{B}$.

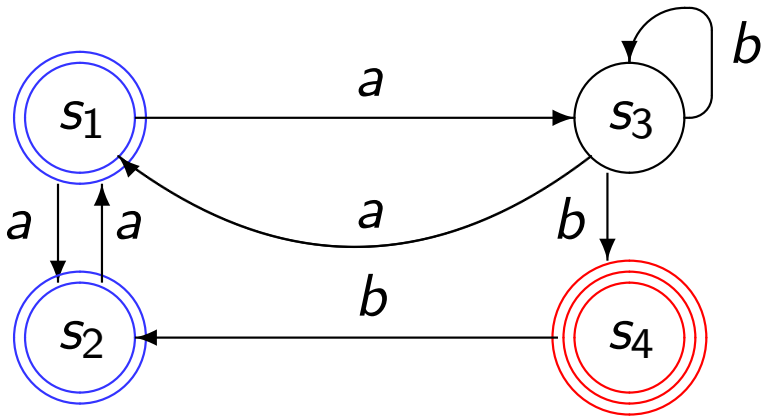
Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (\Sigma, S, I, F, T)$, где $I, F \subseteq S$ и $T \subseteq S \times \Sigma \times S$, — конечный автомат без ε -переходов.

Построим конечный автомат $\mathcal{B} = (\Sigma, \widehat{S}, \widehat{s}_0, \widehat{F}, \widehat{T})$ следующего вида:

- $\widehat{S} = \wp(S) \setminus \{\varnothing\} = \{S' \ : \ S' \subseteq S, \ S' \neq \varnothing\}$,
- $\widehat{s}_0 = I$,
- $\widehat{F} = \{S' \ : \ S' \subseteq S, \ S' \cap F \neq \varnothing\}$,
- для любой буквы $a, \ a \in \Sigma$, и любой пары $S', S'' \subseteq S$ $(S', a, S'') \in \widehat{T} \iff S'' = \{s'' : \exists s' (s' \in S' \wedge (s', a, s'') \in T)\}$.

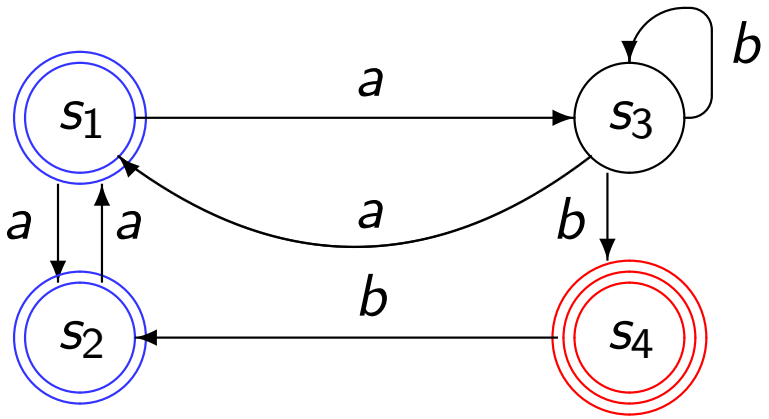
ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

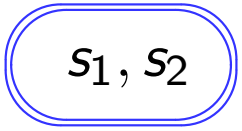
$\mathcal{A}$:



ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

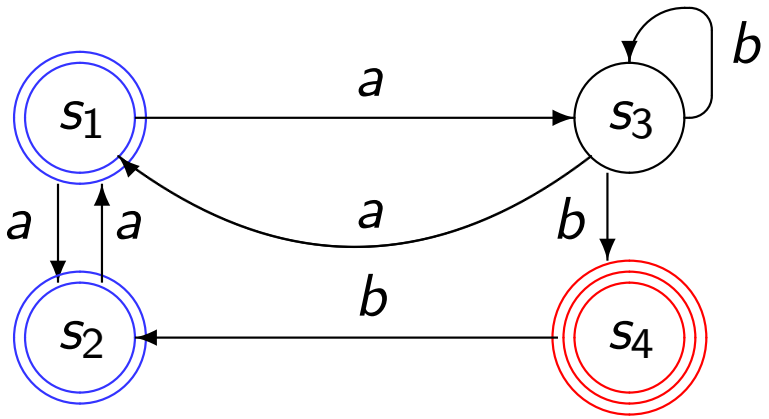




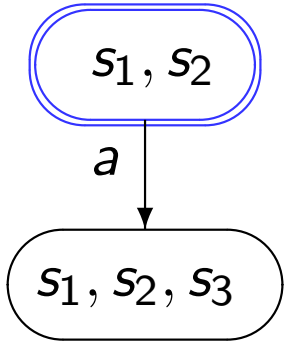
$\mathcal{B}$:

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

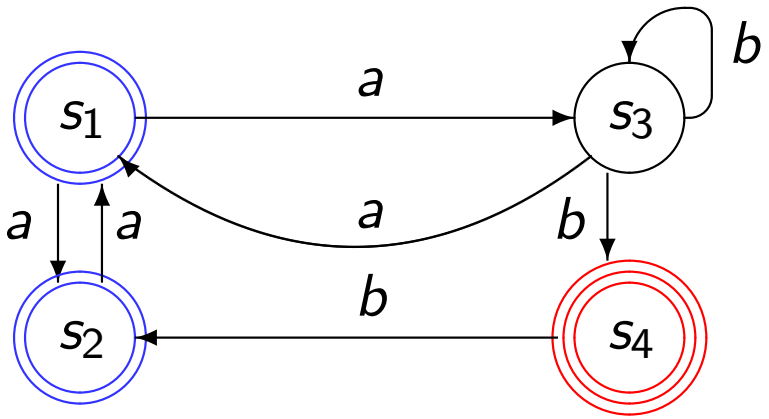


$\mathcal{B}$:

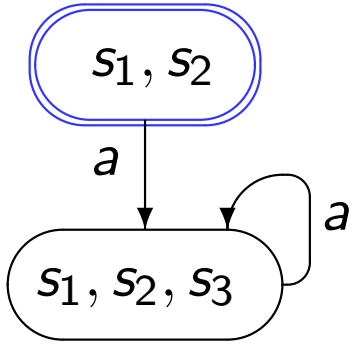


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

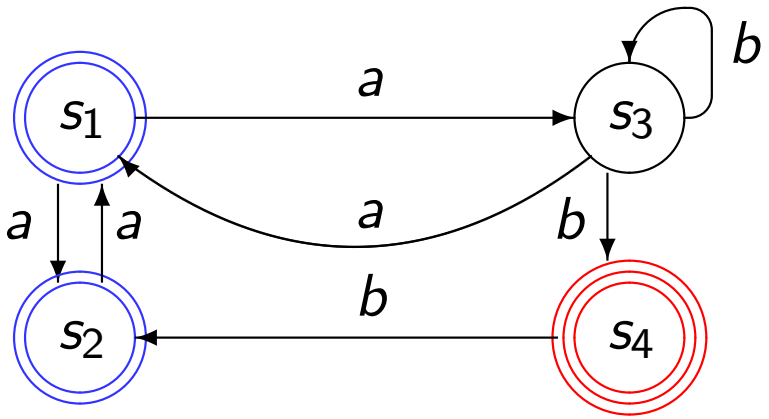


$\mathcal{B}$:

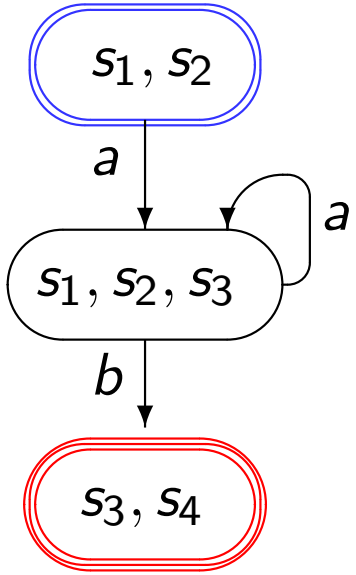


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

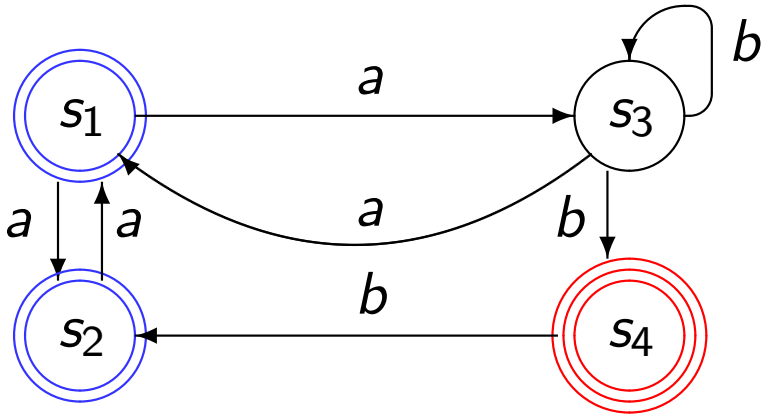


$\mathcal{B}$:

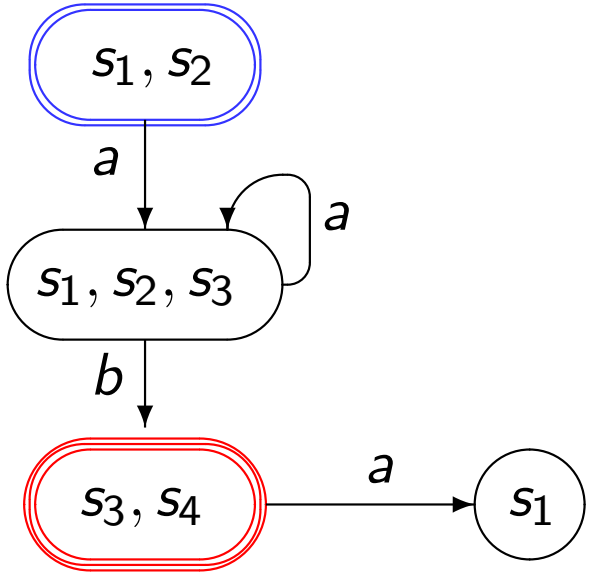


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

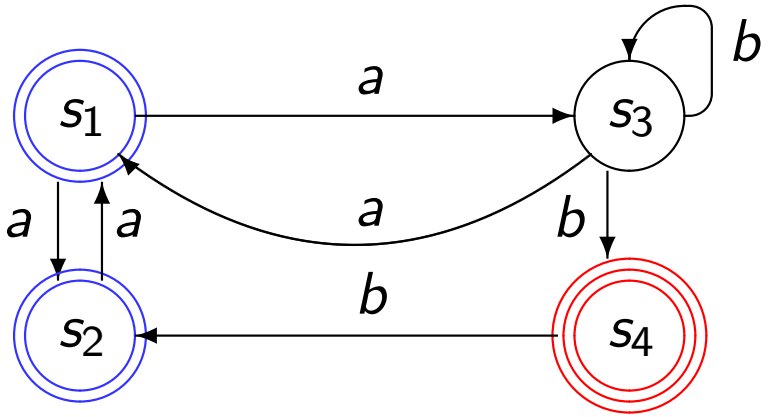


$\mathcal{B}$:

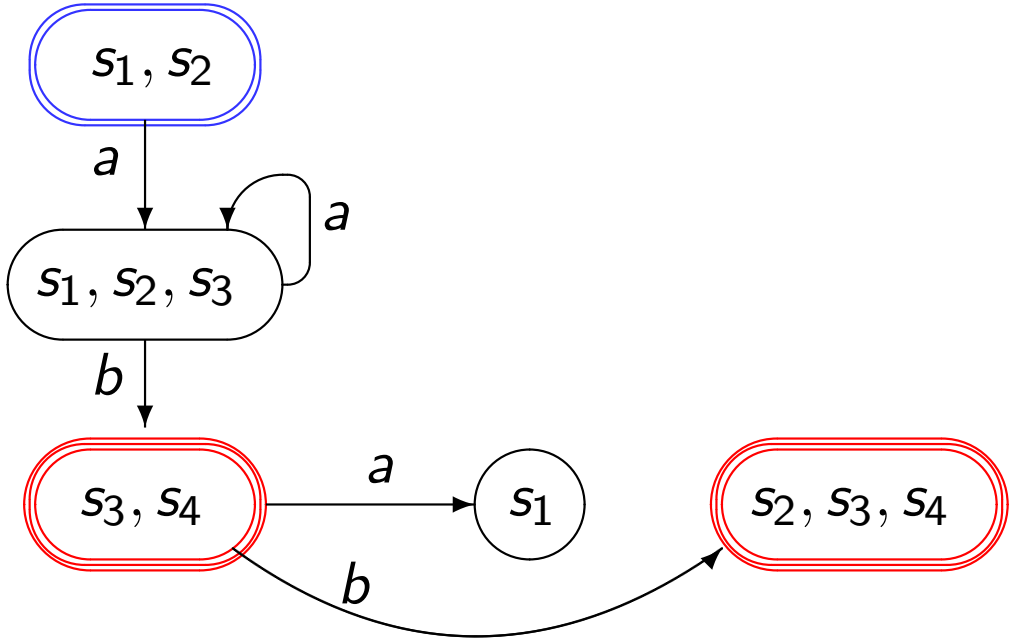


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

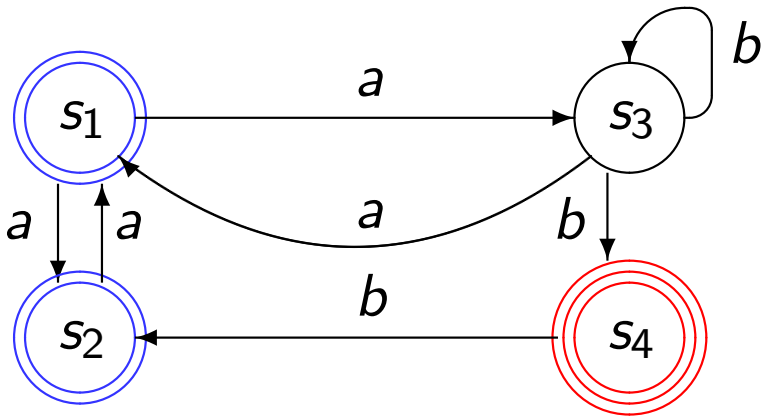


$\mathcal{B}$:

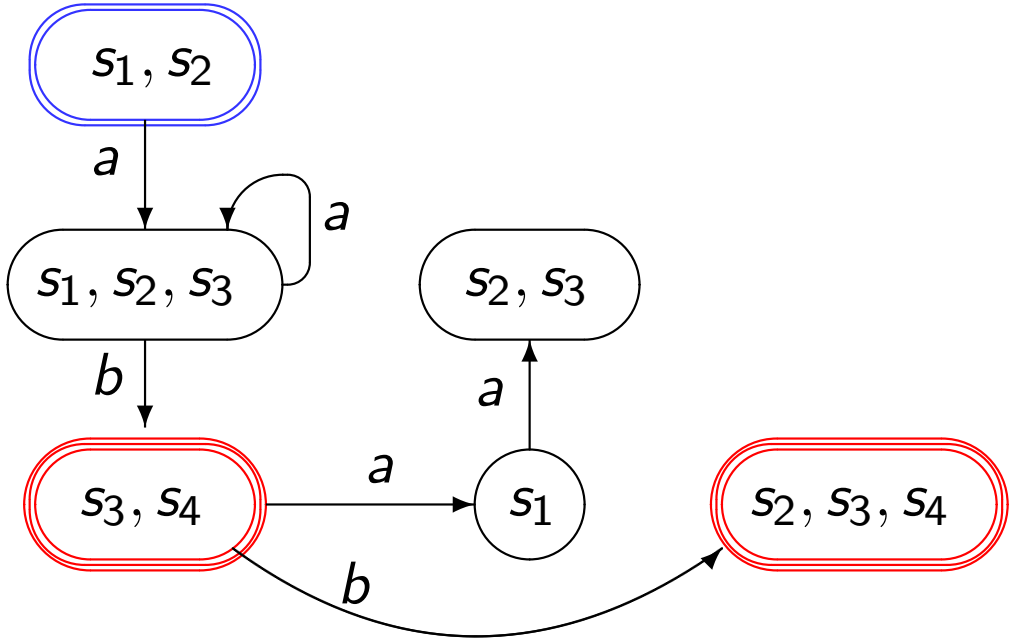


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

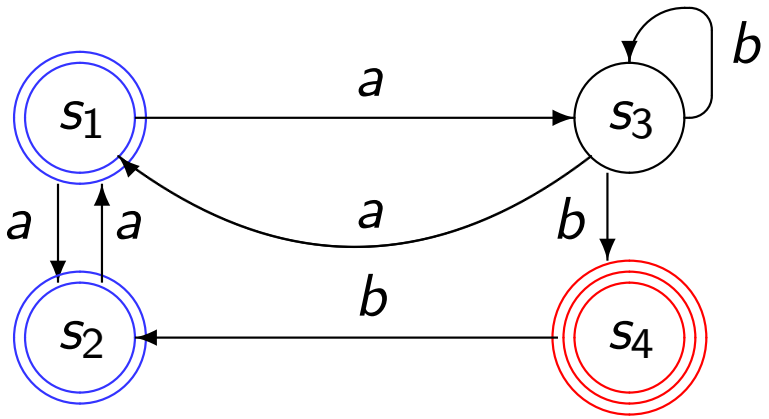


$\mathcal{B}$:

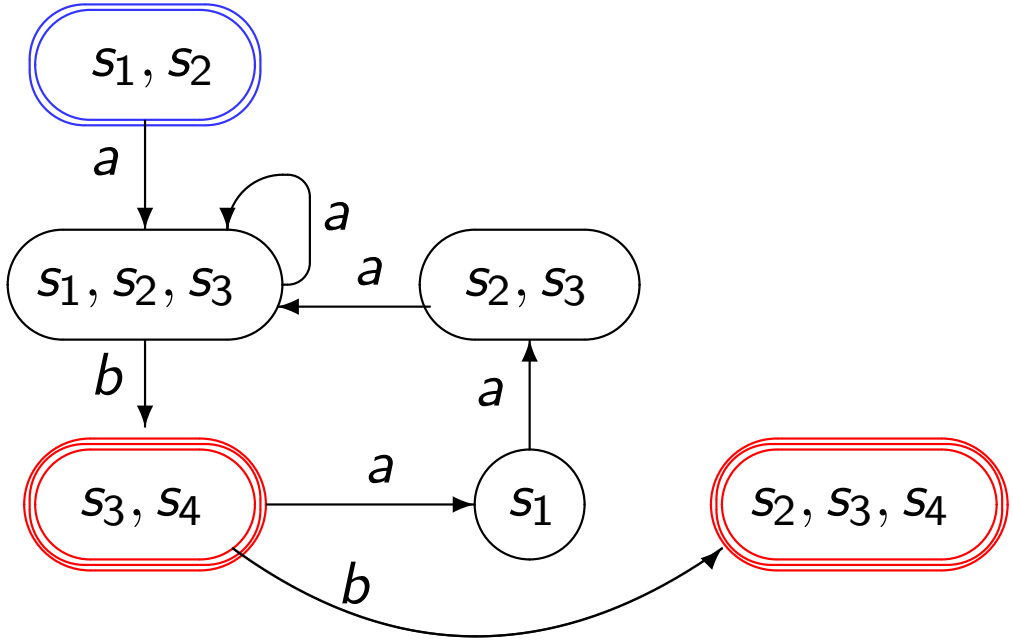


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

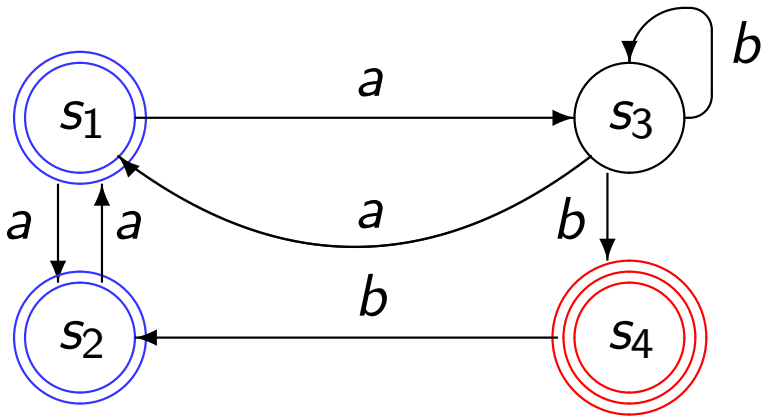


$\mathcal{B}$:

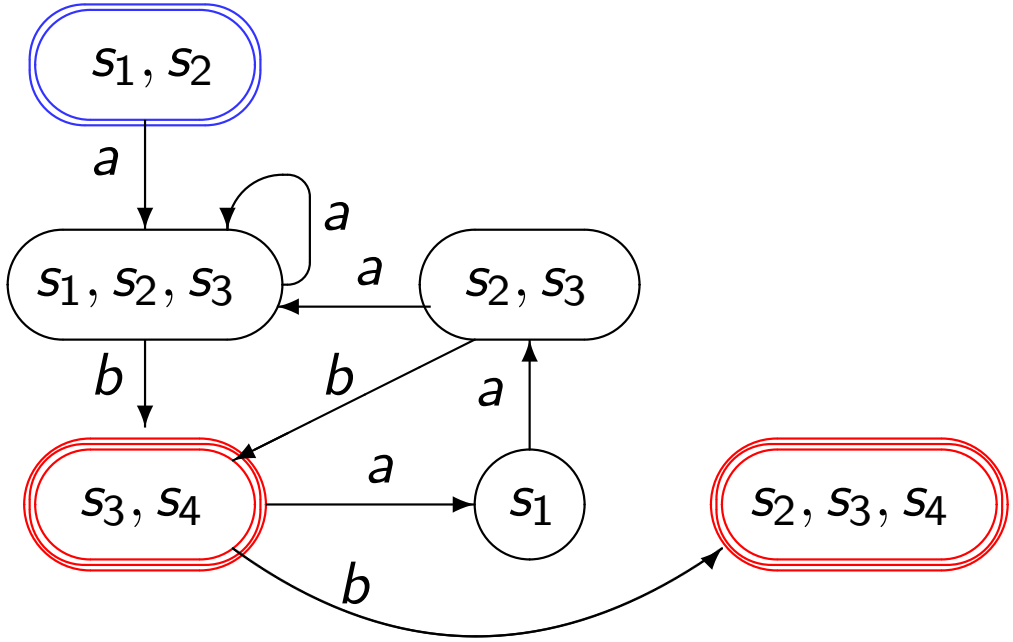


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

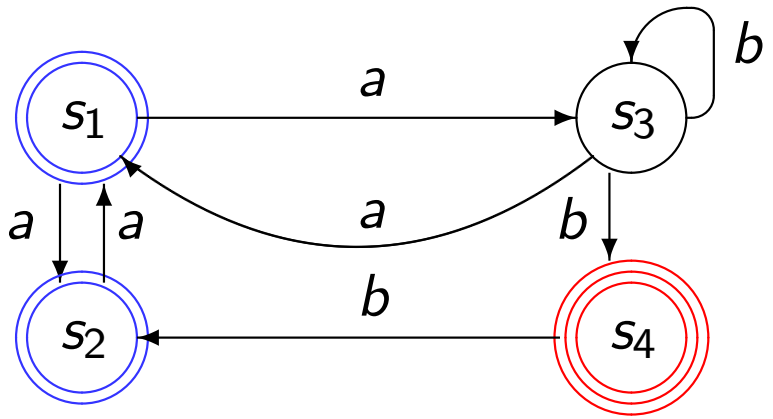


$\mathcal{B}$:

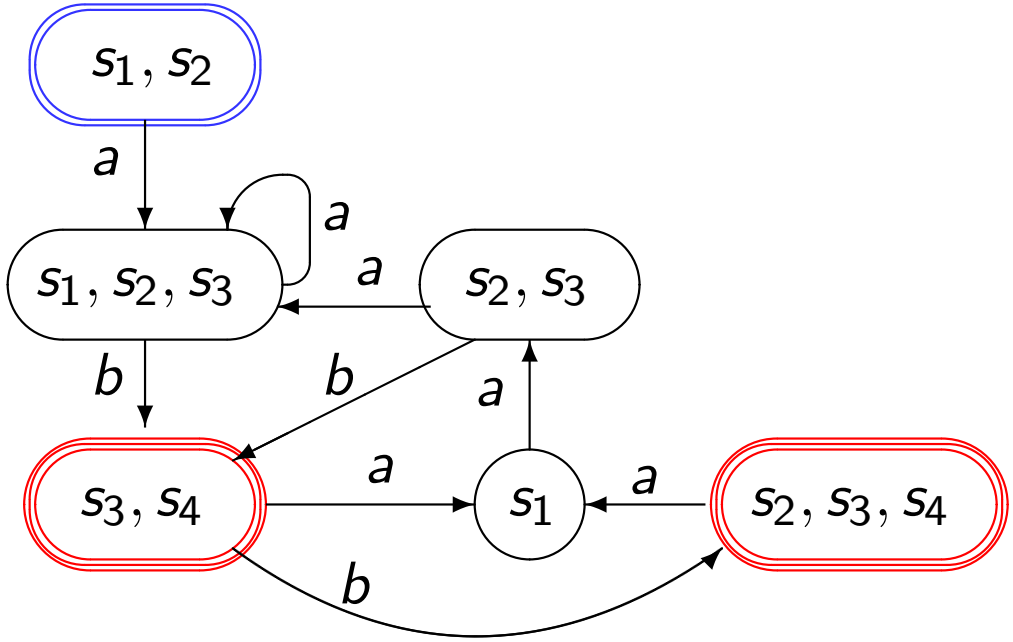


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:

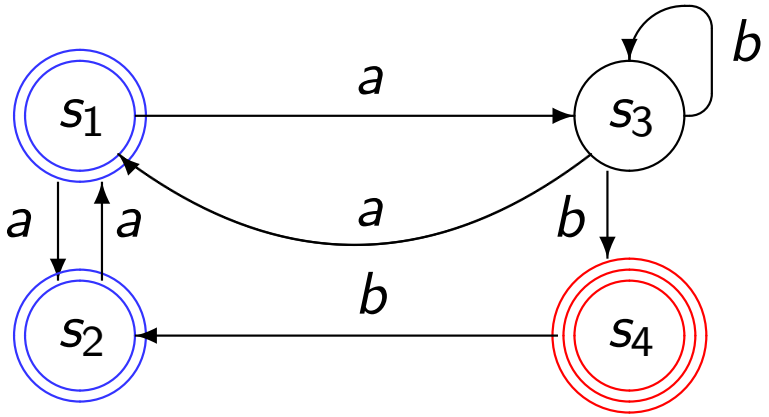


$\mathcal{B}$:

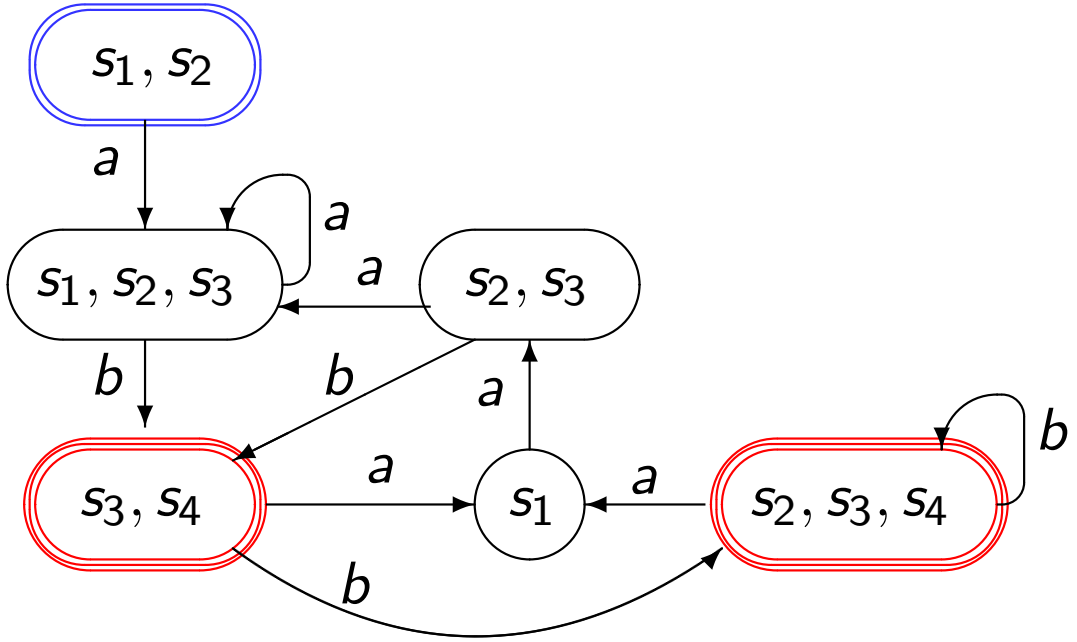


ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Продолжим доказательство теоремы.

Из определения видно, что $\mathcal{B}$ — детерминированный автомат:

$$(S', a, S'') \in \widehat{T} \iff S'' = \{s'' : \exists s' (s' \in S' \wedge (s', a, s'') \in T)\}$$

т.е. S'' однозначно определяется состоянием S' и буквой a.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Продолжим доказательство теоремы.

Из определения видно, что $\mathcal{B}$ — детерминированный автомат:

$$(S', a, S'') \in \widehat{T} \iff S'' = \{s'' : \exists s' (s' \in S' \wedge (s', a, s'') \in T)\}$$

т.е. S'' однозначно определяется состоянием S' и буквой a.

Покажем, что $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Продолжим доказательство теоремы.

Из определения видно, что $\mathcal{B}$ — детерминированный автомат:

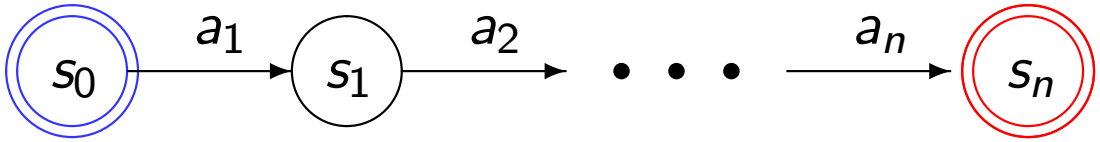
$$(S', a, S'') \in \widehat{T} \iff S'' = \{s'' : \exists s' (s' \in S' \wedge (s', a, s'') \in T)\}$$

т.е. S'' однозначно определяется состоянием S' и буквой a.

Покажем, что $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ из языка $L(\mathcal{A})$.

Тогда автомат $\mathcal{A}$ имеет допускающее вычисление



$s_0 \in I$

$s_n \in F$

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Продолжим доказательство теоремы.

Из определения видно, что $\mathcal{B}$ — детерминированный автомат:

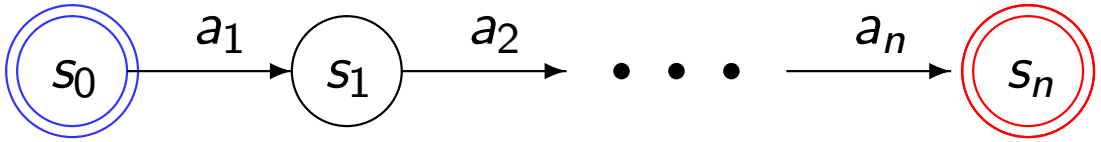
$$(S', a, S'') \in \widehat{T} \iff S'' = \{s'' : \exists s' (s' \in S' \wedge (s', a, s'') \in T)\}$$

т.е. S'' однозначно определяется состоянием S' и буквой a.

Покажем, что $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ из языка $L(\mathcal{A})$.

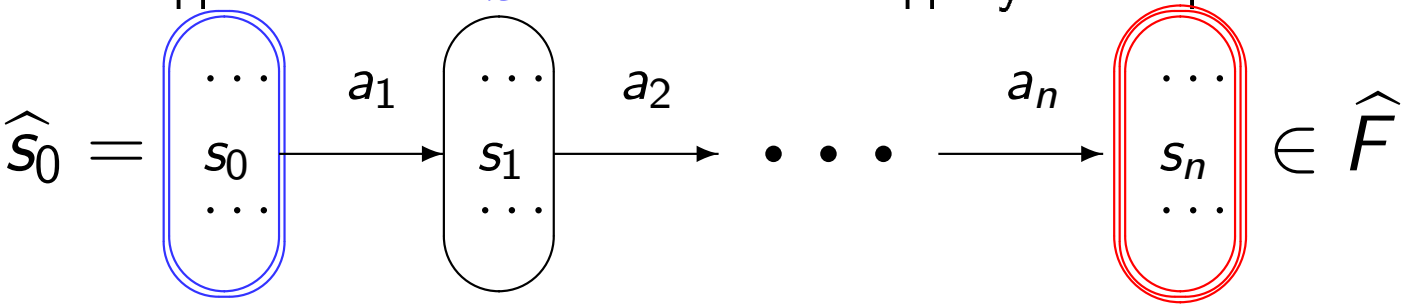
Тогда автомат $\mathcal{A}$ имеет допускающее вычисление



$s_0 \in I$

$s_n \in F$

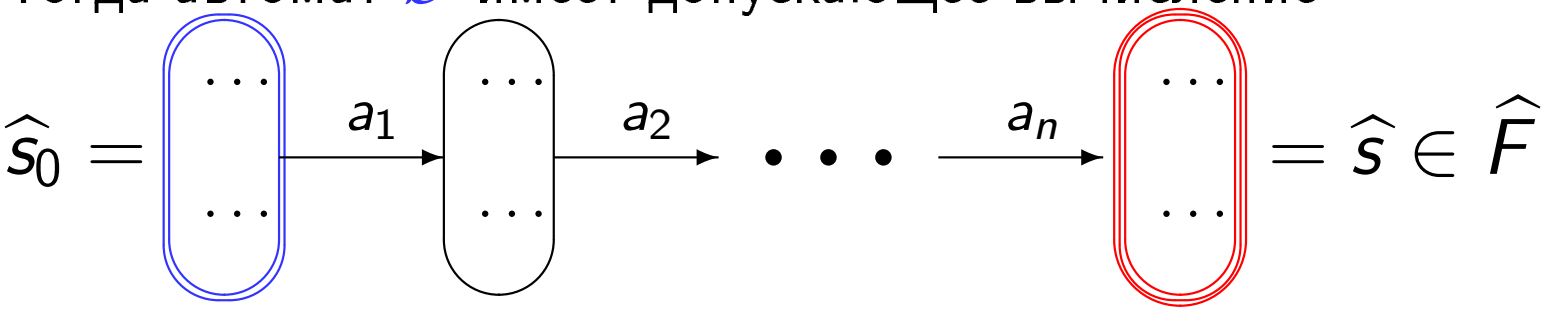
Но тогда автомат $\mathcal{B}$ также имеет допускающее вычисление



Поэтому $w \in L(\mathcal{B})$.

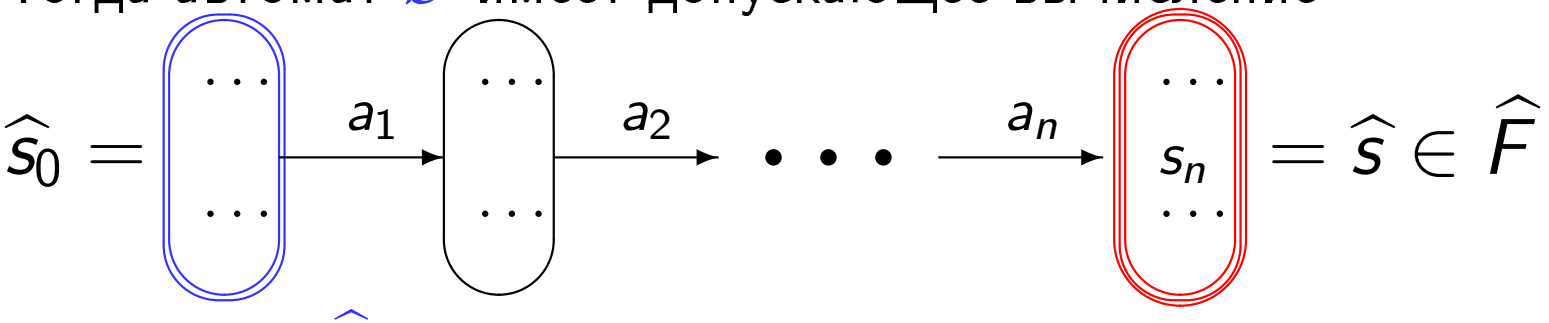
ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ из языка $L(\mathcal{B})$.
Тогда автомат $\mathcal{B}$ имеет допускающее вычисление



ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

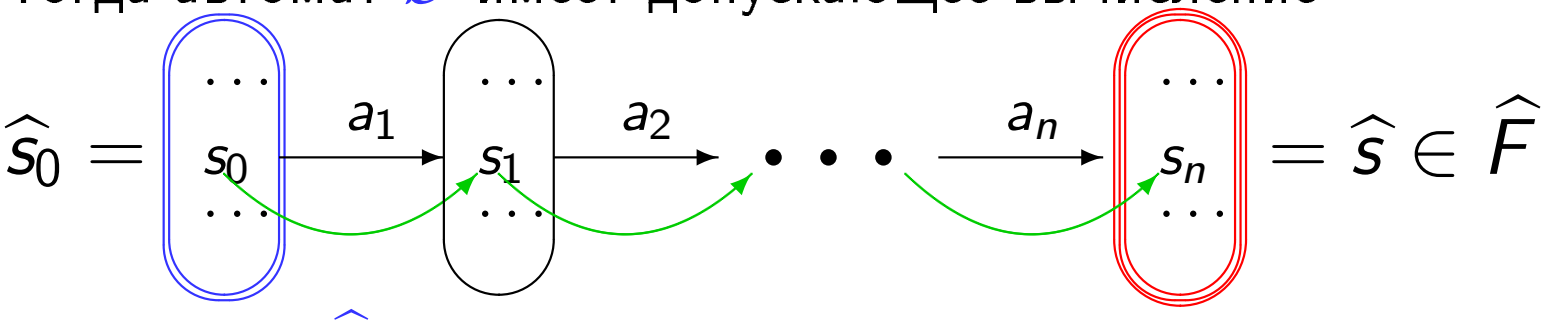
Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ из языка $L(\mathcal{B})$.
Тогда автомат $\mathcal{B}$ имеет допускающее вычисление



Так как $\widehat{s} \in \widehat{F}$, в множестве $\widehat{s}$ есть состояние $s_n, s_n \in F$.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

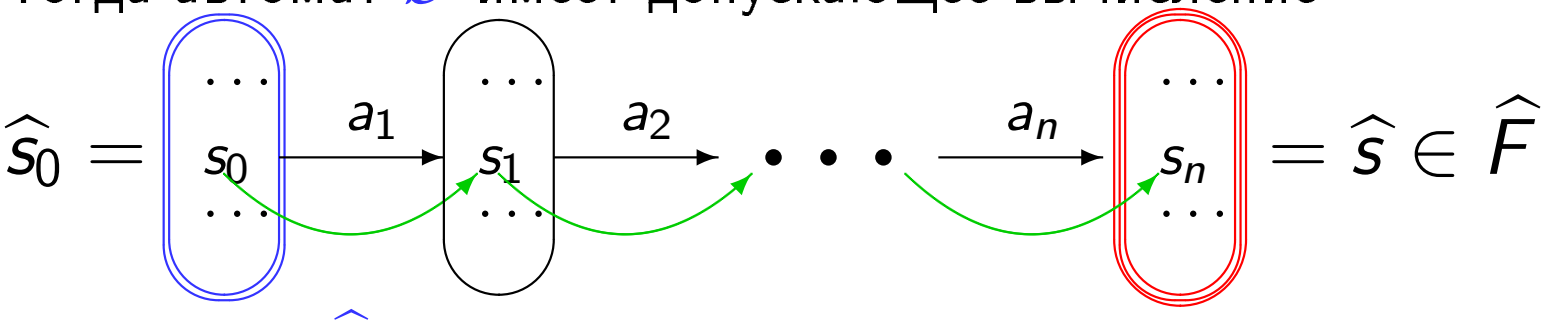
Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ из языка $L(\mathcal{B})$.
Тогда автомат $\mathcal{B}$ имеет допускающее вычисление



Так как $\widehat{s} \in \widehat{F}$, в множестве $\widehat{s}$ есть состояние $s_n, s_n \in F$.
По определению $\widehat{T}$ существует последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots, s_n$ автомата $\mathcal{A}$, связанных переходами отношения T.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

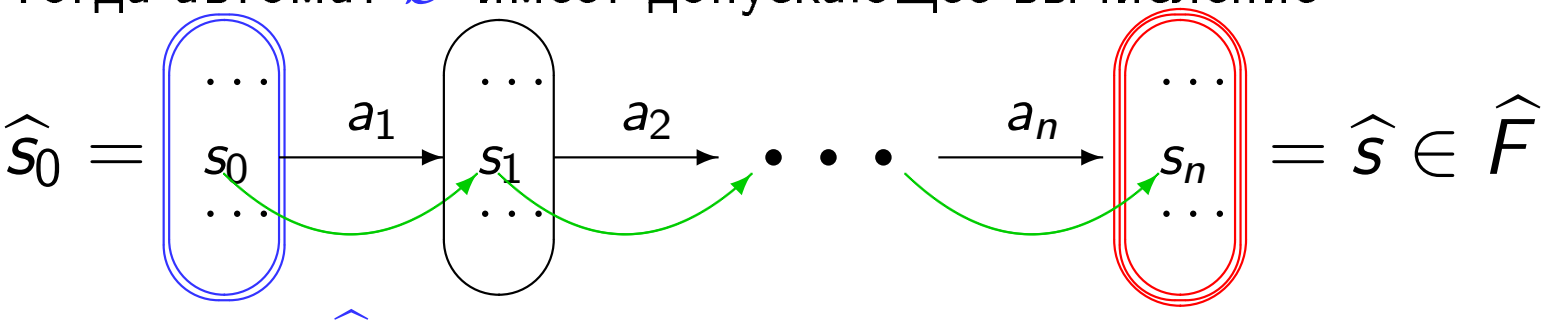
Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ из языка $L(\mathcal{B})$.
Тогда автомат $\mathcal{B}$ имеет допускающее вычисление



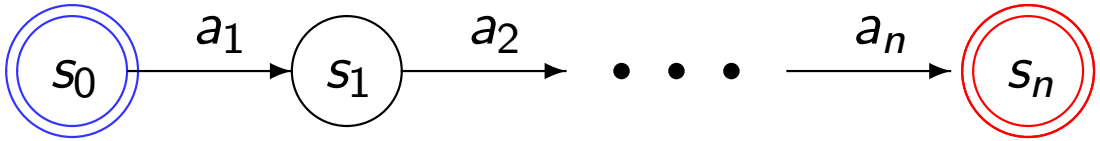
Так как $\widehat{s} \in \widehat{F}$, в множестве $\widehat{s}$ есть состояние $s_n, s_n \in F$.
По определению $\widehat{T}$ существует последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots, s_n$ автомата $\mathcal{A}$, связанных переходами отношения T.
По определению $\widehat{s_0}$ состояние s_0 является инициальным.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ из языка $L(\mathcal{B})$.
Тогда автомат $\mathcal{B}$ имеет допускающее вычисление



Так как $\widehat{s} \in \widehat{F}$, в множестве $\widehat{s}$ есть состояние $s_n, s_n \in F$.
По определению $\widehat{T}$ существует последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots, s_n$ автомата $\mathcal{A}$, связанных переходами отношения T.
По определению $\widehat{s_0}$ состояние s_0 является инициальным.
Но тогда автомат $\mathcal{A}$ также имеет допускающее вычисление



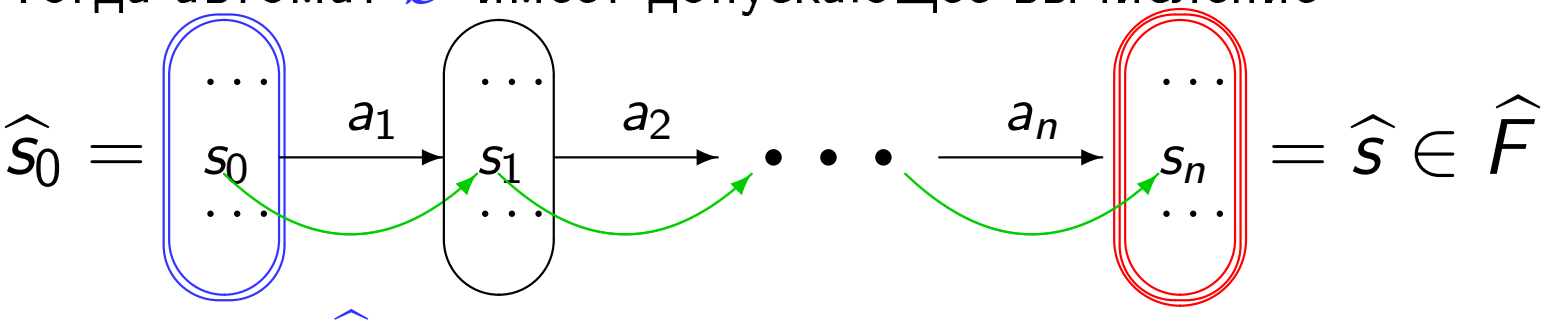
$s_0 \in I$

$s_n \in F$

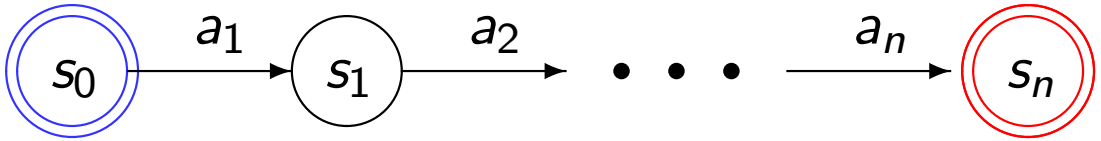
Значит, $w \in L(\mathcal{A})$.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ из языка $L(\mathcal{B})$.
Тогда автомат $\mathcal{B}$ имеет допускающее вычисление



Так как $\widehat{s} \in \widehat{F}$, в множестве $\widehat{s}$ есть состояние $s_n, s_n \in F$.
По определению $\widehat{T}$ существует последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots, s_n$ автомата $\mathcal{A}$, связанных переходами отношения T.
По определению $\widehat{s_0}$ состояние s_0 является инициальным.
Но тогда автомат $\mathcal{A}$ также имеет допускающее вычисление



$s_0 \in I$

$s_n \in F$

Значит, $w \in L(\mathcal{A})$.

Таким образом, мы показали, что $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$. QED

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Предложенный алгоритм детерминизации конечных автоматов позволяет для каждого недетерминированного конечного автомата $\mathcal{A}$ с n состояниями построить детерминированный конечный автомат $\mathcal{B}$ с числом состояний $N \leq 2^n - 1$.

Построенный автомат $\mathcal{B}$ может оказаться неминимальным. Тогда, применив к нему алгоритм минимизации, можно построить минимальный детерминированный автомат $\mathcal{B}_0$, эквивалентный автомату $\mathcal{B}$.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Предложенный алгоритм детерминизации конечных автоматов позволяет для каждого недетерминированного конечного автомата $\mathcal{A}$ с n состояниями построить детерминированный конечный автомат $\mathcal{B}$ с числом состояний $N \leq 2^n - 1$.

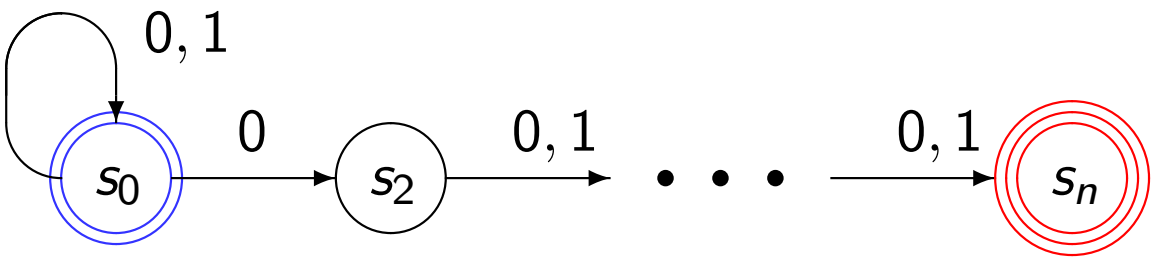
Построенный автомат $\mathcal{B}$ может оказаться неминимальным. Тогда, применив к нему алгоритм минимизации, можно построить минимальный детерминированный автомат $\mathcal{B}_0$, эквивалентный автомату $\mathcal{B}$.

Насколько значительно число состояний автомата $\mathcal{B}_0$ может превосходить число состояний автомата $\mathcal{A}$?

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

ЗАДАЧА 4

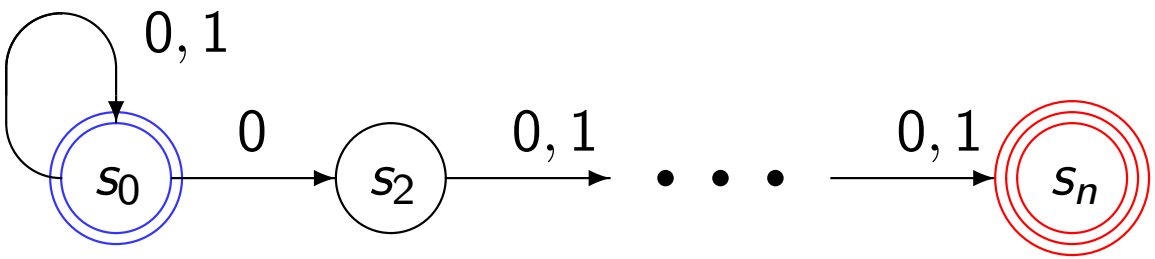
Рассмотрим недетерминированный конечный автомат $\mathcal{A}_n,\ n \geq 1$,



ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

ЗАДАЧА 4

Рассмотрим недетерминированный конечный автомат $\mathcal{A}_n$, $n \geq 1$,



1. Доказать, что язык $L(\mathcal{A}_n)$ состоит из всех двоичных слов, содержащих 0 на n-ой позиции справа.
2. Доказать, что минимальный детерминированный автомат, эквивалентный автомату $\mathcal{A}_n$, имеет 2^n состояний.

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

ЗАДАЧА 5

Чтобы проверить эквивалентность двух (недетерминированных) конечных автоматов, можно применить процедуру детерминизации (теорема 2.1), а затем воспользоваться алгоритмом проверки эквивалентности детерминированных конечных автоматов (теорема 1.6).

Однако переход к детерминированным автоматам может привести к экспоненциальному взрыву числа состояний. А можно ли проверить эквивалентность недетерминированных конечных автоматов существенно эффективнее?

ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

ЗАДАЧА 6

Известно, что задача проверки соотношения $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ является PSPACE-полной проблемой.

Покажите, что для любой 3-КНФ Φ можно построить такой конечный автомат $\mathcal{A}_\Phi$, содержащий не более $|\Phi|$ состояния, что

$$\Phi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad L(\mathcal{A}_\Phi) \neq \Sigma^* .$$

Замкнутость класса автоматных языков

Как можно из одних автоматных языков конструировать другие автоматные языки?

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Теорема 2.2. Пусть L_1 и L_2 — автоматные языки. Тогда языки $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, и $\Sigma^* \setminus L_1$ также являются автоматными.

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Теорема 2.2. Пусть L_1 и L_2 — автоматные языки. Тогда языки $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, и $\Sigma^* \setminus L_1$ также являются автоматными.

Доказательство.

1. Если L_1 и L_2 — автоматные языки, то они распознаются конечными автоматами $\mathcal{A}_1 = (\Sigma, S_1, I_1, F_1, T_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (\Sigma, S_2, I_2, F_2, T_2)$, причем $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

Тогда автомат $\mathcal{A}_\cup = (\Sigma, S_1 \cup S_2, I_1 \cup I_2, F_1 \cup F_2, T_1 \cup T_2)$ распознает язык $L_1 \cup L_2$.

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

2. Рассмотрим также автомат $\mathcal{A}_\cap = (\Sigma, S_1 \times S_2, I_1 \times I_2, F_\cap, T_\cap)$, который устроен так:

- $F_\cap = \{(s_1, s_2) \ : s_1 \in F_1, \ s_2 \in F_2\}$,
- $\Big((s_1', s_2'), a, (s_1'', s_2'')\Big) \in T_\cap \iff (s_1', a, s_1'') \in T_1 \wedge (s_2', a, s_2'') \in T_2$

.

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

2. Рассмотрим также автомат $\mathcal{A}_\cap = (\Sigma, S_1 \times S_2, I_1 \times I_2, F_\cap, T_\cap)$, который устроен так:

- $F_\cap = \{(s_1, s_2) \ : s_1 \in F_1, \ s_2 \in F_2\}$,
- $\Big((s_1', s_2'), a, (s_1'', s_2'')\Big) \in T_\cap \iff (s_1', a, s_1'') \in T_1 \wedge (s_2', a, s_2'') \in T_2$

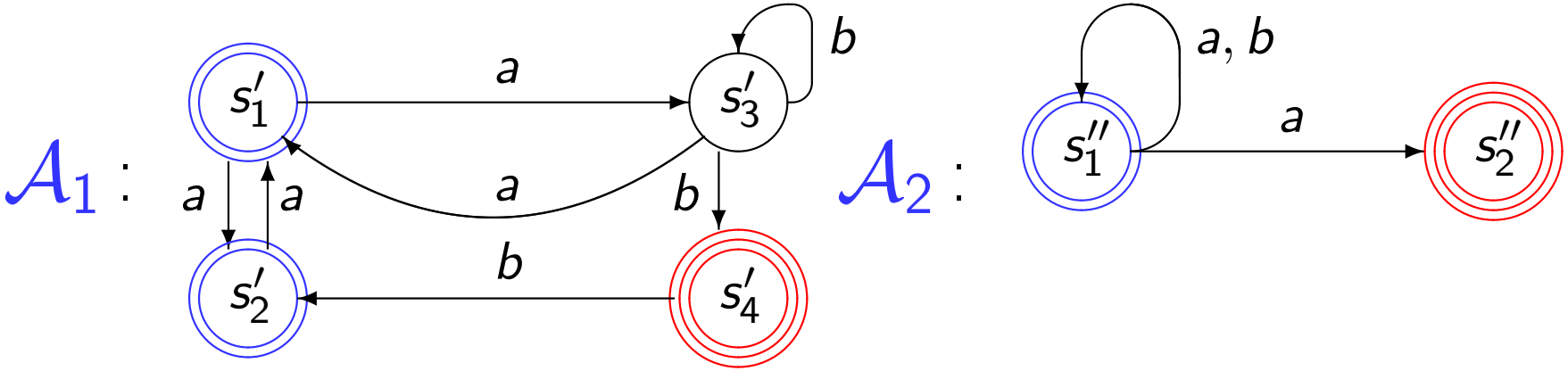
.

Индукцией по длине слова нетрудно показать, что для любого слова w, $w \in \Sigma^*$, и для любых двух пар состояний $s_1', s_1'' \in S_1$ и $s_2', s_2'' \in S_2$, верно соотношение

$$(s_1', s_2') \xrightarrow{w}_{T_\cap} (s_1'', s_2'') \iff s_1' \xrightarrow{w}_{T_1} s_1'' \ \wedge \ s_2' \xrightarrow{w}_{T_2} s_2''.$$

Поэтому $w \in L(\mathcal{A}_\cap) \iff w \in L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$.

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ



ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

3. Если L_1 автоматный язык, то по теореме о детерминизации он распознается конечным детерминированным полным автоматом $\mathcal{A} = (\Sigma, S, s_0, F, T)$.

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

3. Если L_1 автоматный язык, то по теореме о детерминизации он распознается конечным детерминированным полным автоматом $\mathcal{A} = (\Sigma, S, s_0, F, T)$.

Рассмотрим автомат $\overline{\mathcal{A}} = (\Sigma, S, s_0, S \setminus F, T)$.

Ввиду детерминированности автомата $\mathcal{A}$, для каждого слова $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, есть только одно вычисление

$$s_0 \xrightarrow{a_1}_T s_1 \xrightarrow{a_2}_T \cdots \xrightarrow{a_n}_T s_n.$$

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

3. Если L_1 автоматный язык, то по теореме о детерминизации он распознается конечным детерминированным полным автоматом $\mathcal{A} = (\Sigma, S, s_0, F, T)$.

Рассмотрим автомат $\overline{\mathcal{A}} = (\Sigma, S, s_0, S \setminus F, T)$.

Ввиду детерминированности автомата $\mathcal{A}$, для каждого слова $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, есть только одно вычисление

$$s_0 \xrightarrow{a_1}_T s_1 \xrightarrow{a_2}_T \cdots \xrightarrow{a_n}_T s_n.$$

Поэтому $w \in L(\overline{\mathcal{A}}) \iff w \notin L(\mathcal{A})$.

QED

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Задача 7. Пусть L_1 и L_2 — автоматные языки. Доказать, что следующие языки также являются автоматными.

1. $L_1 \setminus L_2$.
2. $L_1^R = \{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 \ : \ a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \in L\}$.
3. $L_1 \cdot L_2$
4. L_1^*.
5. $Pref(L_1)$.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

КАКИЕ ЯЗЫКИ НЕ ЯВЛЯЮТСЯ АВТОМАТНЫМИ?

КАК ДОКАЗАТЬ, ЧТО ЗАДАННЫЙ ЯЗЫК НЕ ЯВЛЯЕТСЯ АВТОМАТНЫМ?

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

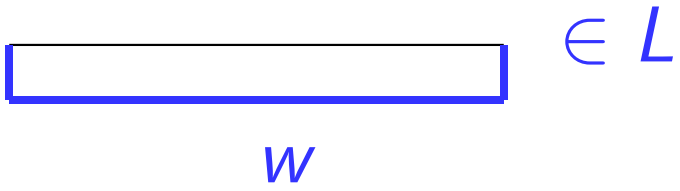
Теорема 2.3. Пусть L — автоматный язык. Тогда существует такое положительное целое число N, что для любого слова $w,\ w \in L$, длины не менее N существует такое разбиение этого слова $w = xyz$, где $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, для которого включение $xy^iz \in L$ справедливо для всех $i,\ i \geq 0$, т.е.

$$w = xyz \in L \implies xz \in L,\ xyyz \in L, \ldots, xyy \cdots yz \in L, \ldots$$

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Теорема 2.3. Пусть L — автоматный язык. Тогда существует такое положительное целое число N, что для любого слова w, $w \in L$, длины не менее N существует такое разбиение этого слова $w = xyz$, где $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, для которого включение $xy^iz \in L$ справедливо для всех i, $i \geq 0$, т.е.

$$w = xyz \in L \implies xz \in L,\ xyyz \in L, \ldots, xyy \cdots yz \in L, \ldots$$

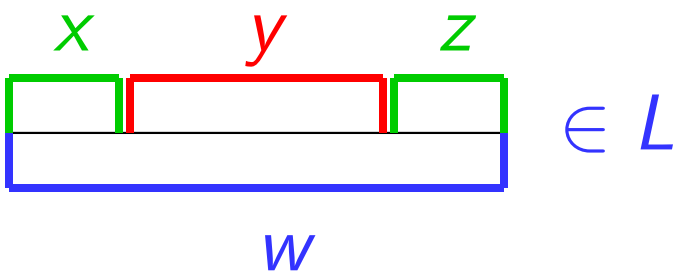


Достаточно длинное слово

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Теорема 2.3. Пусть L — автоматный язык. Тогда существует такое положительное целое число N, что для любого слова w, $w \in L$, длины не менее N существует такое разбиение этого слова $w = xyz$, где $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, для которого включение $xy^iz \in L$ справедливо для всех i, $i \geq 0$, т.е.

$$w = xyz \in L \implies xz \in L,\ xyyz \in L, \ldots, xyy \cdots yz \in L, \ldots$$

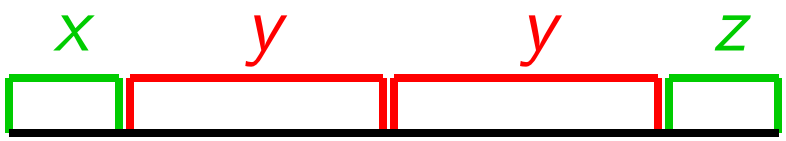


Существует такое разбиение, что

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Теорема 2.3. Пусть L — автоматный язык. Тогда существует такое положительное целое число N, что для любого слова w, $w \in L$, длины не менее N существует такое разбиение этого слова $w = xyz$, где $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, для которого включение $xy^iz \in L$ справедливо для всех i, $i \geq 0$, т.е.

$$w = xyz \in L \implies xz \in L,\ xyyz \in L, \ldots, xyy \cdots yz \in L, \ldots$$



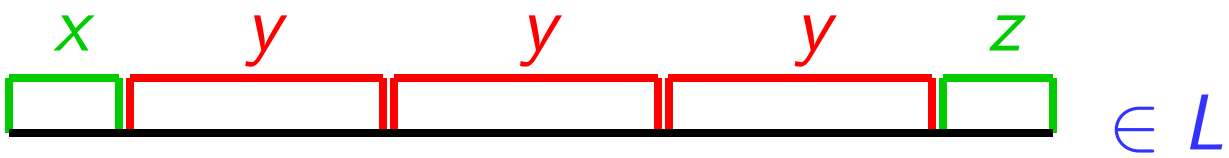
$\in L$

все эти слов также принадлежат языку.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Теорема 2.3. Пусть L — автоматный язык. Тогда существует такое положительное целое число N, что для любого слова w, $w \in L$, длины не менее N существует такое разбиение этого слова $w = xyz$, где $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, для которого включение $xy^iz \in L$ справедливо для всех i, $i \geq 0$, т.е.

$$w = xyz \in L \implies xz \in L,\ xyyz \in L, \ldots, xyy \cdots yz \in L, \ldots$$

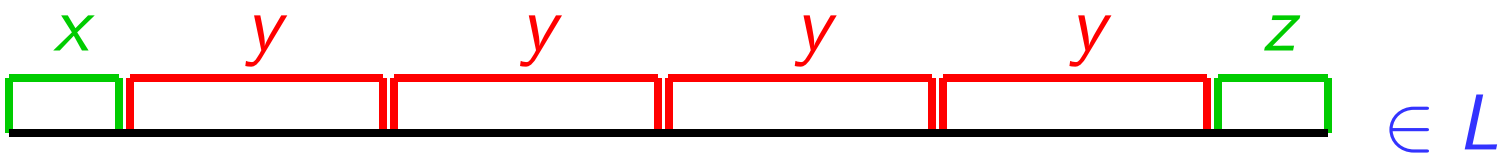


все эти слов также принадлежат языку.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Теорема 2.3. Пусть L — автоматный язык. Тогда существует такое положительное целое число N, что для любого слова w, $w \in L$, длины не менее N существует такое разбиение этого слова $w = xyz$, где $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, для которого включение $xy^iz \in L$ справедливо для всех i, $i \geq 0$, т.е.

$$w = xyz \in L \implies xz \in L,\ xyyz \in L, \ldots, xyy \cdots yz \in L, \ldots$$



все эти слов также принадлежат языку.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Доказательство. Рассмотрим конечный автомат $\mathcal{A} = (\Sigma, S, I, F, T)$ без ε-переходов, распознающий язык L. Положим $N = |S|$. Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n,\ w \in L,\ N \leq n$, и произвольное вычисление автомата, допускающее это слово:

$$comp = s_0 \xrightarrow{a_1}_T s_1 \xrightarrow{a_2}_T \cdots \xrightarrow{a_n}_T s_n.$$

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Доказательство. Рассмотрим конечный автомат $\mathcal{A} = (\Sigma, S, I, F, T)$ без ε-переходов, распознающий язык L. Положим $N = |S|$. Рассмотрим произвольное слово $w = a_1 a_2 \ldots a_n,\ w \in L,\ N \leq n$, и произвольное вычисление автомата, допускающее это слово:

$$comp = s_0 \xrightarrow{a_1}_T s_1 \xrightarrow{a_2}_T \cdots \xrightarrow{a_n}_T s_n.$$

В этой последовательности $n+1$ элементов $s_0, s_1, \ldots, s_n$, а $|S| = N \leq n$. Значит, существуют такие $i, j,\ 0 \leq i < j \leq N$, для которых верно $s_i = s_j$.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Поэтому слово w допускает разбиение

$$w = \underbrace{a_1 a_2 \dots a_i}_{x} \underbrace{a_{i+1} \dots a_j}_{y} \underbrace{a_{j+1} \dots a_n}_{z},$$

для которого $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, и при вычисление $comp$ представимо в виде

$$comp = s_0 \xrightarrow{x}_* s_i \xrightarrow{y}_* s_i \xrightarrow{z}_* s_n.$$

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Поэтому слово w допускает разбиение

$$w = \underbrace{a_1 a_2 \dots a_i}_{x} \underbrace{a_{i+1} \dots a_j}_{y} \underbrace{a_{j+1} \dots a_n}_{z},$$

для которого $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, и при вычисление $comp$ представимо в виде

$$comp = s_0 \xrightarrow{x}_* s_i \xrightarrow{y}_* s_i \xrightarrow{z}_* s_n.$$

Но тогда последовательности

$$s_0 \xrightarrow{x}_* s_i \xrightarrow{z}_* s_n,$$
$$s_0 \xrightarrow{x}_* s_i \underbrace{\xrightarrow{y}_* s_i \cdots \xrightarrow{y}_*}_{i \text{ раз}} s_i \xrightarrow{z}_* s_n$$

также являются допускающими вычислениями автомата $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Поэтому слово w допускает разбиение

$$w = \underbrace{a_1 a_2 \ldots a_i}_{x} \underbrace{a_{i+1} \ldots a_j}_{y} \underbrace{a_{j+1} \ldots a_n}_{z},$$

для которого $|xy| \leq N$ и $y \neq \varepsilon$, и при вычисление $comp$ представимо в виде

$$comp = s_0 \xrightarrow{x}_* s_i \xrightarrow{y}_* s_i \xrightarrow{z}_* s_n.$$

Но тогда последовательности

$$s_0 \xrightarrow{x}_* s_i \xrightarrow{z}_* s_n,$$
$$s_0 \xrightarrow{x}_* s_i \underbrace{\xrightarrow{y}_* s_i \cdots \xrightarrow{y}_*}_{i \text{ раз}} s_i \xrightarrow{z}_* s_n$$

также являются допускающими вычислениями автомата $\mathcal{A}$.

Значит, $xy^i z \in L$ для всех i, $i \geq 0$.

QED

ПРИМЕРЫ НЕАВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Пример. Покажем, что язык $L = \{0^i 1^i \ : i \geq 0\}$, не является автоматным.

ПРИМЕРЫ НЕАВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Пример. Покажем, что язык $L = \{0^i 1^i \ : i \geq 0\}$, не является автоматным.

Предположим противное: $L = L(\mathcal{A})$ для некоторого конечного автомата $\mathcal{A} = (\Sigma, S, I, F, T)$.

Тогда по теореме о разрастании существует такое положительное число N, для которого слово $w = 0^N 1^N$ допускает разбиение $w = \underbrace{0\ldots0}_{i}\underbrace{0\ldots0}_{j}\underbrace{0\ldots0}_{N-i-j}\underbrace{1\ldots1}_{N}$, где $j > 0$, и при этом слово

$$w' = \underbrace{0\ldots0}_{i}\underbrace{0\ldots0}_{N-i-j}\underbrace{1\ldots1}_{N} = 0^{N-j}1^N$$

также обязано принадлежать языку L вопреки определению этого языка.

ПРИМЕРЫ НЕАВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

Пример. Покажем, что язык $L = \{0^i 1^i \ : i \geq 0\}$, не является автоматным.

Предположим противное: $L = L(\mathcal{A})$ для некоторого конечного автомата $\mathcal{A} = (\Sigma, S, I, F, T)$.

Тогда по теореме о разрастании существует такое положительное число N, для которого слово $w = 0^N 1^N$ допускает разбиение $w = \underbrace{0\ldots0}_{i}\underbrace{0\ldots0}_{j}\underbrace{0\ldots0}_{N-i-j}\underbrace{1\ldots1}_{N}$, где $j > 0$, и при этом слово

$$w' = \underbrace{0\ldots0}_{i}\underbrace{0\ldots0}_{N-i-j}\underbrace{1\ldots1}_{N} = 0^{N-j}1^N$$

также обязано принадлежать языку L вопреки определению этого языка.

Полученное противоречие означает, что язык L не является автоматным.

QED

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

ЗАДАЧА 6. [Трудная] Теорема 2.3 дает необходимое условие автоматности формальных языков.

Докажите, что это условие не является достаточным.

Приведите пример неавтоматного языка, который также удовлетворяет заключению теоремы 2.3.

Обоснуйте, что предложенный язык не является автоматным.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ ДЛЯ АВТОМАТНЫХ ЯЗЫКОВ

ЗАДАЧА 7. [Трудная] Докажите следующий вариант теоремы о разрастании, который представляет необходимое и достаточное условие автоматности языков.

Язык L является автоматным тогда и только тогда, когда существует такое положительное целое число N, что для любого слова w, $w \in L$, длины не менее N существует такое разбиение этого слова $w = xyz$, где $y \neq \varepsilon$, что для любых слов u и v и для любого i, $i \geq 0$, справедливо соотношение $uxv \in L \Leftrightarrow uxy^i v \in L$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 2.