Лекция: Операции над конечно-автоматными множествами. Дополнение, объединение, пересечение, произведение и итерация автоматных множеств, их автоматность.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по "Дискретной математике 2".
1-й курс, группа 141,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Автоматные множества

Вспомним определение автоматного множества.

Пусть A – конечный алфавит.

Множество (язык) $L \subseteq A^*$ называется **автоматным множеством (языком)**, если найдется конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F),$$

для которого $L(\mathcal{A}) = L$.

Операции над автоматными множествами

Мы можем рассмотреть **операции** над автоматными множествами.

Желательно, чтобы наши операции не выводили нас за класс автоматных множеств.

Операция дополнения

Пусть $L \subseteq A^*$ – некоторое множество.

Дополнением $\bar{L}$ к множеству L называется множество, состоящее из всех тех конечных слов в алфавите A, которые не содержатся в множестве L.

Т.е. $\bar{L} = A^* \setminus L$.

Пример дополнения

Пример 1. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и L состоит из всех слов из нулей и единиц, начинающихся с 0.

Тогда дополнение $\bar{L}$ содержит все слова из нулей и единиц, начинающиеся с 1 (**не** начинающиеся с 0).

Автоматность дополнения

Пусть L – автоматное множество.

Является ли его дополнение $\bar{L}$ автоматным множеством?

Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма об автоматности дополнения

Лемма 1. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *– конечный алфавит, и* $L \subseteq A^*$ *–* **автоматное** *множество. Тогда его дополнение* $\bar{L} = A \setminus L$ *также является автоматным множеством.*

Доказательство. Множество L – автоматное. Значит, найдется конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F),$$

такой, что $L = L(\mathcal{A})$.

Лемма об автоматности дополнения

Доказательство (продолжение). Рассмотрим конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A}' = (A, Q, \psi, q_1, Q \setminus F).$$

Понятно, что новый автомат $\mathcal{A}'$ **принимает** все слова $\alpha \in A^*$, которые не принимал автомат $\mathcal{A}$, и, наоборот, **не принимает** все слова $\alpha \in A^*$, которые принимал автомат $\mathcal{A}$.

Т.е. $\bar{L} = L(\mathcal{A}')$.

$\square$

Операции объединения и пересечения

Пусть $L_1, L_2 \subseteq A^*$ – некоторые множества.

Объединением $L_1 \cup L_2$ множеств L_1 и L_2 называется множество, состоящее из всех тех конечных слов в алфавите A, которые содержатся или в множестве L_1, или в множестве L_2.

Пересечением $L_1 \cap L_2$ множеств L_1 и L_2 называется множество, состоящее из всех тех конечных слов в алфавите A, которые содержатся и в множестве L_1, и в множестве L_2.

Пример объединения и пересечения

Пример 2. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L_1, L_2 \subseteq A^*$, и L_1 состоит из всех слов из нулей и единиц, начинающихся с 0, а L_2 содержит все слова четной длины.

Тогда **объединение** $L_1 \cup L_2$ содержит все слова из нулей и единиц, или начинающиеся с 0, или имеющие четную длину.

А **пересечение** $L_1 \cap L_2$ содержит все слова из нулей и единиц четной длины, которые начинаются с 0.

Автоматность объединения и пересечения

Пусть L_1, L_2 – автоматные множества.

Являются ли их объединение $L_1 \cup L_2$ и пересечение $L_1 \cap L_2$ автоматными множествами?

Ответ на этот вопрос дают следующие леммы.

Лемма об автоматности объединения

Лемма 2. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *– конечный алфавит, и* $L_1, L_2 \subseteq A^*$ *–* **автоматные** *множества. Тогда их объединение* $L_1 \cup L_2$ *также является автоматным множеством.*

Доказательство. Множества L_1, L_2 – автоматные. Значит, найдутся конечные автоматы без выхода

$$\mathcal{A}_1 = (A, Q_1, \psi_1, q_1', F_1),$$

такой, что $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$, и

$$\mathcal{A}_2 = (A, Q_2, \psi_2, q_1'', F_2),$$

такой, что $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$.

Мы можем считать, что $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Лемма об автоматности объединения

Доказательство (продолжение). Построим **недетерминированный** конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \Psi, q_1, F),$$

в котором q_1 – новое состояние, т.е. $q_1 \notin Q_1 \notin Q_1, Q_2$;

и $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_1\}$.

Функцию переходов Ψ для каждого символа $a \in A$ определим так:
1) $\Psi(a, q) = \{\psi_1(a, q)\}$, если $q \in Q_1$;
2) $\Psi(a, q) = \{\psi_2(a, q)\}$, если $q \in Q_2$;
3) $\Psi(a, q_1) = \{\psi_1(a, q_1')\} \cup \{\psi_2(a, q_1'')\}$.

Множество заключительных состояний F определим так:
1) $F = F_1 \cup F_2$, если пустое слово $\Lambda \notin L_1 \cup L_2$;
2) $F = F_1 \cup F_2 \cup \{q_1\}$, если пустое слово $\Lambda \in L_1 \cup L_2$.

Лемма об автоматности объединения

Доказательство (продолжение). Содержательно мы сделали вот что:

1) взяли диаграммы переходов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и новое состояние q_1 и объединили их;

2) все переходы в диаграммах $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оставили без изменений;

3) из нового состояния q_1 по каждому символу $a \in A$ перешли **или** в состояние, в которое можно перейти из начального состояния q_1' по символу a в диаграмме $\mathcal{A}_1$, **или** в состояние, в которое можно перейти из начального состояния q_1'' по символу a в диаграмме $\mathcal{A}_2$;

4) новое состояние q_1 сделали начальным;

5) объединение заключительных состояний $F_1 \cup F_2$ сделали заключительным (и добавили к ним еще и новое состояние q_1, если пустое слово Λ принииается хотя бы одним из автоматов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$).

Лемма об автоматности объединения

Доказательство (продолжение). По построению получаем, что

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2).$$

$\square$

Лемма об автоматности пересечения

Лемма 3. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *– конечный алфавит, и* $L_1, L_2 \subseteq A^*$ *–* **автоматные** *множества. Тогда их пересечение* $L_1 \cap L_2$ *также является автоматным множеством.*

Доказательство. Воспользуемся теоретико-множественным тождеством (правилом де Моргана)

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2}.$$

□

Следствие об автоматности разности

Из лемм 1–3 можно извлекать следствия об автоматности множеств, полученных из автоматных множеств при помощи других теоретико-множественных операций.

Следствие. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *– конечный алфавит, и* $L_1, L_2 \subseteq A^*$ *–* **автоматные** *множества. Тогда их разность* $L_1 \setminus L_2$ *также является автоматным множеством*.

Доказательство. Воспользуемся теоретико-множественным тождеством

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L}_2.$$

□

Операция произведения

Пусть $L_1, L_2 \subseteq A^*$ – некоторые множества.

Произведением $L_1 L_2$ множеств L_1 и L_2 называется множество, состоящее из всех тех конечных слов в алфавите A, которые составлены соединением (конкатенацией) некоторого слова из L_1 и некоторого слова из L_2.

Т.е.

$$L_1 L_2 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2\}.$$

Пример произведения

Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L_1, L_2 \subseteq A^*$, и L_1 состоит из всех слов вида 0^n, $n \geq 1$, а L_2 содержит все слова вида 1^m, $m \geq 1$.

Тогда **произведение** $L_1 L_2$ содержит все слова из нулей и единиц, в которых сначала встречается некоторое количество 0, а потом – некоторое количество 1.

Автоматность произведения

Пусть L_1, L_2 – автоматные множества.

Является ли их произведение $L_1 L_2$ автоматным множеством?

Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма об автоматности произведения

Лемма 4. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *– конечный алфавит, и* $L_1, L_2 \subseteq A^*$ *–* **автоматные** *множества. Тогда их произведение* $L_1 L_2$ *также является автоматным множеством.*

Доказательство. Множества L_1, L_2 – автоматные. Значит, найдутся конечные автоматы без выхода

$$\mathcal{A}_1 = (A, Q_1, \psi_1, q_1', F_1),$$

такой, что $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$, и

$$\mathcal{A}_2 = (A, Q_2, \psi_2, q_1'', F_2),$$

такой, что $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$.

Мы можем считать, что $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Лемма об автоматности произведения

Доказательство (продолжение). 1. Сначала рассмотрим случай, когда $\Lambda \notin L_1$.

Построим **недетерминированный** конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \Psi, q_1', F_2),$$

в котором $Q = Q_1 \cup Q_2$.

Функцию переходов Ψ для каждого символа $a \in A$ определим так:
1) $\Psi(a, q) = \{\psi_1(a, q)\}$, если $q \in Q_1$, и $\psi_1(a, q) \notin F_1$;
2) $\Psi(a, q) = \{\psi_1(a, q)\} \cup \{q_1''\}$, если $q \in Q_1$, и $\psi_1(a, q) \in F_1$;
3) $\Psi(a, q) = \{\psi_2(a, q)\}$, если $q \in Q_2$.

Лемма об автоматности произведения

Доказательство (продолжение). Содержательно мы сделали вот что:

1) взяли диаграммы переходов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и объединили их;

2) начальное состояние q_1' первого автомата сделали начальным;

3) все переходы в диаграммах $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оставили без изменений;

4) **но добавили новые переходы**: если из состояния $q \in Q_1$ по некоторому символу $a \in A$ в первом автомате можно перейти в какое-то его заключительное состояние, то добаляем **еще один** переход, а именно из состояния q по символу a переходим в начальное состояние q_1'' второго автомата;

5) множество заключительных состояний F_2 второго автомата сделали множеством заключительных состояний.

Лемма об автоматности произведения

Доказательство (продолжение). По построению получаем, что

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1)L(\mathcal{A}_2).$$

2. Если же $\Lambda \in L_1$, то заметим, что

$$L_1 L_2 = (L_1 \setminus \{\Lambda\})L_2 \cup L_2.$$

$\square$

Операция итерации

Пусть $L \subseteq A^*$ – некоторое множество.

Итерацией L^* множества L называется множество, состоящее из пустого слова Λ и всех тех конечных слов в алфавите A, которые составлены соединением (конкатенацией) некоторых слов из L.

Т.е.

$$L^* = \{\Lambda\} \cup \{\alpha_1 \ldots \alpha_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L, n \geq 1\}.$$

Операция итерации

Введем обозначения: $L^0 = \{\Lambda\}$, и $L^n = \underbrace{L \dots L}_{n}$.

Тогда **итерацию** L^* множества L можно записать так:

$$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n.$$

Пример итерации

Пример 4. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и $L = \{0, 1\}$.

Тогда **итерация** L^* содержит все конечные слова из нулей и единиц.

Автоматность итерации

Пусть L – автоматное множество.

Является ли его итерация L^* автоматным множеством?

Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма об автоматности итерации

Лемма 5. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *– конечный алфавит, и* $L \subseteq A^*$ *–* **автоматное** *множество. Тогда его итерация* L^* *также является автоматным множеством*.

Доказательство. Множество L – автоматное. Значит, найдется конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F),$$

такой, что $L = L(\mathcal{A})$.

Лемма об автоматности итерации

Доказательство (продолжение). Построим **недетерминированный** конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A}' = (A, Q', \Psi, q_1', F'),$$

в котором q_1' – новое состояние, $Q' = Q \cup q_1'$, и $F' = F \cup q_1'$.

Функцию переходов Ψ для каждого символа $a \in A$ определим так:
1) $\Psi(a, q) = \{\psi(a, q)\}$, если $q \in Q$, и $\psi(a, q) \notin F$;
2) $\Psi(a, q) = \{\psi(a, q)\} \cup \{q_1\}$, если $q \in Q$, и $\psi(a, q) \in F$;
3) $\Psi(a, q_1') = \{\psi(a, q_1)\}$.

Лемма об автоматности итерации

Доказательство (продолжение). Содержательно мы сделали вот что:

1) взяли диаграмму переходов $\mathcal{A}$ и добавили новое состояние q_1';

2) новое состояние q_1' сделали начальным;

3) все переходы в диаграмме $\mathcal{A}$ оставили без изменений;

Лемма об автоматности итерации

Доказательство (продолжение).
4) **но добавили новые переходы**:

если из состояния $q \in Q$ по некоторому символу $a \in A$ можно перейти в какое-то заключительное состояние, то добавляем **еще один** переход, а именно из состояния q по символу a переходим в начальное состояние q_1 исходного автомата;

из нового начального состояния q_1' по каждому символу $a \in A$ переходим в то состояние, в которое из начального состояния q_1 исходного автомата можно перейти по символу a;

5) новое начальное состояние q_1' и множество заключительных состояний F исходного автомата сделали множеством заключительных состояний.

Лемма об автоматности итерации

Доказательство (продолжение). По построению получаем, что

$$L(\mathcal{A}) = (L(\mathcal{A}))^*.$$

$\square$

Теорема об операциях над автоматными множествами

Соединим все доказанные свойства в одну теорему.

Теорема 6. *При помощи операций дополнения, объединения, пересечения, произведения, итерации из автоматных множеств могут быть получены только автоматные множества.*

Примеры

При помощи рассмотренных операций можно доказывать автоматность явно заданных множеств слов.

Пример 5. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Докажите автоматность следующих множеств:

1) L_1, содержащего только одно слово $\alpha \in A^*$;

2) L_2, содержащего все слова в алфавите A, кроме одного слова $\alpha \in A^*$.

Примеры

Решение. 1) Пусть $\alpha = a_{i_1} \ldots a_{i_l}$, где $a_1, \ldots, a_{i_l} \in A$. Тогда

$$L_1 = \{a_{i_1}\}\{a_{i_2}\} \ldots \{a_{i_l}\}.$$

Построить конечный автомат, принимающий только одну букву a_{i_j} несложно.

2) Заметим, что $L_2 = A^* \setminus L_1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. По доказательствам лемм 1–5 построить НКА без выхода, принимающие множества из примеров 1–4. Детерминизировать полученные НКА.

2. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Докажите автоматность следующих множеств:

1) L_1, содержащего только конечное число слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A^*$;

2) L_2, содержащего все слова в алфавите A, кроме конечного числа слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A^*$.

Литература к лекции

1. Марченков С.С. Конечные автоматы. М.: Физматлит, 2008.

Конец лекции