Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 41

Теорема Чёрча

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

От МТ к ХЛП

Проблема останова МТ Halt — это следующая проблема распознавания:

- Входы: МТ M, ленточное слово w
- $\mathrm{Halt}(M, w) = \mathbb{t} \Leftrightarrow$ вычисление M на w конечно

Известно, что эта проблема алгоритмически неразрешима

Используя этот факт, покажем неразрешимость проблемы распознавания LogProg, устроенной так:

- Входы: конечная сигнатура σ логики предикатов, ХЛП $\mathcal{P}$ и основной запрос $\mathcal{Q}$ этой сигнатуры
- $\mathrm{LogProg}(\sigma, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathbb{t} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \to^*_{\mathcal{P}} \square$

От МТ к ХЛП

Утверждение. **Проблема** Halt *m*-**сводима к проблеме** LogProg

Доказательство.

В блоке 40 предложен алгоритм $\mathfrak{A}$, для произвольных МТ $M = (\mathcal{A}, \mathbf{\Lambda}, \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$ и ленточного слова w преобразующий пару (M, w) в конечную сигнатуру, ХЛП и основной запрос $\overline{\mathfrak{A}}(M, w) = (\sigma, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$:

- $\sigma = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\mathbf{nil}\}, \{\mathbf{.}^{(2)}\}, \{\mathrm{p}^{(1)}\} \rangle$,
- $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1_M$,
- $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\tau_{(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q}_0, w\mathbf{\Lambda})})$ —

такие что вычисление M на w конечно $\Leftrightarrow$ $\mathcal{Q} \to^*_{\mathcal{P}} \square$

Значит, $\mathrm{Halt}(M, w) = \mathrm{LogProg}(\overline{\mathfrak{A}}(M, w))$, что и означает m-сводимость Halt к LogProg ▼

Следствие. **Проблема** LogProg **алгоритмически неразрешима**

Доказательство. Достаточно совместить последнее утверждение с известной неразрешимостью проблемы останова МТ и следствием из теоремы об m-сводимости ▼

От ХЛП к логике предикатов (ЛП)

Проблема общезначимости формул ЛП Valid — это проблема распознавания, устроенная так:

- Вход: конечная[1] сигнатура σ и формула ЛП φ этой сигнатуры
- $\mathrm{Valid}(\sigma, \varphi) = \mathbb{t} \Leftrightarrow \models \varphi$

Утверждение. **Проблема** LogProg m**-сводима к проблеме** Valid

Доказательство.

Достаточно показать, как по ХЛП $\mathcal{P} = \{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_k\}$ и основному запросу $\mathcal{Q}$ этой сигнатуры построить формулу φ (*той же конечной сигнатуры, что и программа с запросом*), такую что

$$\mathcal{Q} \to^*_{\mathcal{P}} \square \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi$$

1 Приложив некоторые усилия, можно изложить всё и для сигнатур с бесконечным множеством символов, но для экономии времени не будем этого делать

Утверждение: $\mathrm{LogProg} \overset{m}{\mapsto} \mathrm{Valid}$ (доказательство)

$\mathcal{P} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$ — ХЛП $\quad + \quad$ $\mathcal{Q}$ — основной запрос $\quad \to ? \quad \varphi$

$\mathcal{Q} \to^*_{\mathcal{P}} \Box$

$\Leftrightarrow$ (по корректности операционной семантики ХЛП)

существует правильный ответ θ на запрос $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$

$\Leftrightarrow$ (т.к. $\mathcal{Q}$ — основной запрос)

ε — правильный ответ на запрос $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$

$\Leftrightarrow$ (по определению правильного ответа на запрос к ХЛП)

$\{\Phi_{\mathcal{R}_1}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_k}\} \models \Phi_{\mathcal{Q}}$

$\Leftrightarrow$ (по теореме о логическом следствии)

$\models \Phi_{\mathcal{R}_1} \,\&\, \dots \,\&\, \Phi_{\mathcal{R}_k} \to \Phi_{\mathcal{Q}}$

Значит, подходящей будет формула $\varphi = \Phi_{\mathcal{R}_1} \,\&\, \dots \,\&\, \Phi_{\mathcal{R}_k} \to \Phi_{\mathcal{Q}}$ ▼

Теорема Чёрча

Проблема общезначимости формул логики предикатов (Valid) алгоритмически неразрешима

Доказательство. Достаточно совместить последнее утверждение, полученную ранее неразрешимость проблемы LogProg и следствие из теоремы об m-сводимости ▼

Следствие. Проблема общезначимости формул логики предикатов сигнатуры $\langle \emptyset, \{\mathbf{f}^{(2)}\}, \{\mathrm{P}^{(1)}\}\rangle$ алгоритмически неразрешима

Доказательство. Достаточно заметить, что

- Для сведéния Halt к LogProg и затем к Valid потребовалась сигнатура с конечным множеством констант $\mathcal{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\mathbf{nil}\}$, одним функциональным символом $\mathbf{.}^{(2)}$ и одним предикатным символом $\mathrm{p}^{(1)}$
- Если в (не)общезначимой формуле заменить константу на переменную, не встречающуюся в формуле, то формула останется (не)общезначимой ▼