

Лекция 5. Раскраски ребер графов.
Хроматический индекс графа. Хроматический
индекс двудольных графов. Верхняя и нижняя
оценки хроматического индекса графа.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте <https://mk.cs.msu.ru>

Раскраска ребер графа

Раскраска ребер графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\},$$

в котором из $e_1 = (v, w) \in E$, $e_2 = (v, u) \in E$ следует $\rho(e_1) \neq \rho(e_2)$.

Т. е. любые ребра с общей вершиной обязаны быть окрашены в разные цвета.

Хроматический индекс $\chi'(G)$ графа G — наименьшее возможное число цветов, в которое можно раскрасить его ребра.

Для произвольного графа G верно соотношение $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Задача о доступе

Пусть найдется m узлов и n пользователей. Некоторым из пользователей нужно обратиться к некоторым узлам. При этом каждое обращение занимает одинаковое время, каждый пользователь не может одновременно обращаться к нескольким узлам и каждый узел не может одновременно обрабатывать несколько запросов пользователей. За какое наименьшее время могут быть обработаны все запросы пользователей?

Полные графы

Предложение 1. *Справедливы равенства $\chi'(K_n) = n$, если n — нечетное число, $\chi'(K_n) = n - 1$, если n — четное число.*

Доказательство.

1. Пусть n — нечетное число. Предположим, что $\chi'(K_n) = n - 1$. Тогда из каждой вершины графа K_n исходит ровно одно ребро каждого цвета.

Поэтому число ребер одного цвета равно $n/2$, т. к. каждое ребро имеет два конца.

Но n — нечетное число, получаем противоречие.

Теперь раскрасим ребра графа K_n в n цветов $C = \{1, 2, \dots, n\}$: ребру (i, j) графа K_n , где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ припишем цвет $((i + j) \pmod n) + 1$.

Полные графы

2. Пусть n — четное число. Удалим из графа K_n произвольную вершину v и раскрасим ребра оставшегося графа K_{n-1} в $(n-1)$ цветов.

Рассмотрим в этом графе K_{n-1} все ребра одного цвета i . Их концами являются $(n-2)$ вершины, т. к. $(n-1)$ — нечетное число. Поэтому в этом графе K_{n-1} найдется некоторая вершина v_i , из которой не исходит ребро цвета i . Припишем в исходном графе K_n ребру (v, v_i) цвет i .

Т. к. в каждой вершине графа K_{n-1} отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа K_n , исходящие из вершины v , раскрасим в разные цвета.



Двудольные графы

Теорема 1 (Д. Кениг, 1931) Если G — двудольный граф, то $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство. Индукцией по числу ребер q при заданном числе вершин p построим раскраску ребер двудольного графа G в $\Delta(G)$ цветов из $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$.

Двудольные графы

Доказательство.

Базис индукции: $q = 0$ верен.

Индуктивный переход. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$, в котором $|V| = p$, $|E| = q + 1 \geq 1$.

Пусть $e = (u, w) \in E$ — произвольное ребро графа G .

Рассмотрим граф $G' = G - e$. Граф G' является двудольным, содержит p вершин и q ребер. Значит, для него верно предположение индукции.

Раскрасим ребра графа G' в $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ цветов из множества C .

Двудольные графы

Доказательство.

1. Если найдется цвет $i \in C$, одновременно отсутствующий среди ребер из вершин u, w графа G' , то припишем ребру (u, w) графа G цвет i .

Двудольные графы

Доказательство.

2. Иначе заметим, что найдется некоторый цвет $i \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины u , и некоторый цвет $j \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины w , $i \neq j$, т. к. $d_{G'}(u) \leq \Delta(G) - 1$, $d_{G'}(w) \leq \Delta(G) - 1$.

Рассмотрим неудлиняемую цепь P с ребрами чередующихся цветов i и j , начинающуюся из вершины w .

Эта цепь не может достигнуть вершины u . В самом деле, если цепь P приходит в вершину u , то в графе G существует цикл $C = u(u, w)wPu$ нечетной длины, чего не может быть.

Переокрасим на цепи P ребра: цвет i заменим на цвет j , цвет j заменим на цвет i .

Затем припишем ребру (u, w) в графе G цвет i .



Полные двудольные графы

Следствие 1.1. *Справедливо равенство $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n)$.*

Двудольные мультиграфы

Замечание 1. Теорема 1 верна и для мультиграфов. При этом степенью вершины в мультиграфе называется число исходящих из нее ребер.

Теорема Визинга

Теорема 2 (В. Г. Визинг, 1964). *Для произвольного графа $G = (V, E)$ верно соотношение $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Доказательство: индукция по числу ребер $q = |E|$ при заданном числе вершин $p = |V|$.

Базис индукции $q = 0$ верен.

Индуктивный переход: пусть утверждение верно для всех графов с p вершинами и q ребрами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с p вершинами и $(q + 1)$ ребрами.

Выберем $e_1 = (u, w_1) \in E$ — произвольное ребро графа G .

Положим $G' = G - e_1$. Очевидно, что $\Delta(G') \leq \Delta(G)$.

Для графа G' верно предположение индукции. Пусть ρ — раскраска ребер графа G' в $\Delta(G) + 1$ цветов из $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G), \Delta(G) + 1\}$.

Теорема Визинга

Доказательство.

Назовем цвет $i \in C$ **отсутствующим** в вершине $v \in V$, если для каждого ребра $e = (v, w) \in E$ верно $\rho(e) \neq i$.

Т. к. $|C| > \Delta(G)$, то в каждой вершине $v \in V$ отсутствует хотя бы один цвет.

Пусть в вершине u отсутствует цвет i_0 и в вершине w_1 отсутствует цвет i_1 .

Теорема Визинга

Доказательство.

По индукции построим последовательность вершин w_1, w_2, \dots, w_m и соответствующую последовательность цветов i_1, i_2, \dots, i_m .

Базис индукции: положим w_1 — конец ребра $e_1 = (u, w_1)$, и i_1 — цвет, отсутствующий в вершине w_1 .

Индуктивный переход. Пусть уже построены последовательности вершин w_1, w_2, \dots, w_j и цветов i_1, i_2, \dots, i_j , $j \geq 1$.

Если найдется такое ребро $e = (u, w) \in E$, что $w \neq w_1, \dots, w_j$ и $\rho(e) = i_j$, то положим $w_{j+1} = w$, $e_{j+1} = (u, w_{j+1})$ и i_{j+1} — цвет, отсутствующий в вершине w_{j+1} .

Иначе положим $m = j$ и завершим построение.

Теорема Визинга

Доказательство.

Итак, получены такие последовательности вершин w_1, w_2, \dots, w_m и цветов i_1, i_2, \dots, i_m , что $\rho(e_j) = \rho(u, w_j) = i_{j-1}$ при $j \geq 2$, и цвет i_j отсутствует в вершине w_j , $j = 1, \dots, m$.

1. Если $i_m \neq i_1$ для всех $j = 1, \dots, m-1$, то перекрасим ребра e_j : положим $\rho(e_j) = i_j$, $j = 1, \dots, m$.

Получим раскраску ребер графа G в $\Delta(G) + 1$ цветов.

Теорема Визинга

Доказательство.

Итак, получены такие последовательности вершин w_1, w_2, \dots, w_m и цветов i_1, i_2, \dots, i_m , что $\rho(e_j) = \rho(u, w_j) = i_{j-1}$ при $j \geq 2$, и цвет i_j отсутствует в вершине w_j , $j = 1, \dots, m$.

2. Пусть $i_m = i_k$ для некоторого $1 \leq k \leq m - 1$.

Тогда перекрасим некоторые ребра e_j : положим $\rho(e_j) = i_j$, $j = 1, \dots, k - 1$, и сотрем цвет у ребра $e_k = (u, w_k)$.

Теорема Визинга

Доказательство.

Теперь рассмотрим такой подграф H графа G , который содержит все вершины графа G и ребра только цветов i_0 и i_k . Каждая компонента связности графа H — либо изолированная вершина, либо простая цепь, либо простой цикл. Заметим, что $d_H(u) \leq 1$, $d_H(w_k) \leq 1$, $d_H(w_m) \leq 1$. Поэтому эти три вершины u, w_k, w_m не могут входить в одну компоненту связности графа H .

Теорема Визинга

Доказательство.

а) Пусть вершины u и w_k входят в разные компоненты связности графа H .

Тогда в компоненте связности графа H , содержащей вершину w_k , заменим цвет i_0 на цвет i_k и заменим цвет i_k на цвет i_0 .

Теперь цвет i_0 отсутствует в вершинах u, w_k .

Положим $\rho(e_k) = i_0$.

Получим раскраску ребер графа G в $\Delta(G) + 1$ цветов.

Теорема Визинга

Доказательство.

б) Пусть вершины u и w_m входят в разные компоненты связности графа H .

Тогда в компоненте связности графа H , содержащей вершину w_m , заменим цвет i_0 на цвет i_k и заменим цвет i_k на цвет i_0 .

Теперь цвет i_0 отсутствует в вершинах u, w_m .

Положим $\rho(e_j) = i_{j+1}$, $j = k, \dots, m-1$, и $\rho(e_m) = i_0$.

Получим раскраску ребер графа G в $\Delta(G) + 1$ цветов.



Краткий итог лекции

1. Хроматический индекс двудольного графа G равен $\Delta(G)$.
2. Хроматический индекс любого графа G принимает одно из двух значений: либо $\Delta(G)$, либо $\Delta(G) + 1$.
3. Задача выяснения для произвольного графа, какому из двух значений равен его хроматический индекс, является труднорешаемой.

Задачи

1. По доказательству предложения 1 раскрасить ребра полного графа G в наименьшее число цветов, если

- 1) $G = K_4$;
- 2) $G = K_5$;
- 3) $G = K_6$;
- 4) $G = K_7$.

2. По доказательству теоремы 1 раскрасить ребра двудольного графа G в наименьшее число цветов, если

- 1) $G = K_{2,3}$;
- 2) $G = K_{3,3}$;
- 3) $G = K_{3,4}$;
- 4) $G = K_{4,4}$.

Задачи

3. По доказательству теоремы 2 раскрасить ребра графа G в $\Delta(G) + 1$ цветов, если

- 1) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4 ;
- 2) $G = K_4 - \{e_1, e_2\}$, где e_1, e_2 — произвольные различные ребра графа K_4 (рассмотреть все возможные случаи);
- 3) $G = K_5 - e$, где e — произвольное ребро графа K_5 ;
- 4) $G = K_5 - \{e_1, e_2\}$, где e_1, e_2 — произвольные различные ребра графа K_5 (рассмотреть все возможные случаи).

4. Найти хроматический индекс графа $G = (V, E)$, если:

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 248–252.
2. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 451–457.