

Лекция 7. Вероятностный метод. Малые вариации. Перекраска

Лектор — Нагорный Александр Степанович
anagorny@list.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Идея перекраски (вариант метода малых вариаций)

Предположим, при случайной раскраске возникает некоторое множество дефектов. Тогда мы применяем случайную перекраску к дефектам с целью их удаления.

Если перекраска является слишком слабой, то не все дефекты устраняются.

Если же перекраска является слишком сильной, то создаются новые дефекты.

Интенсивность перекраски задаётся параметром p , а указанные две возможности соответствуют убыванию и возрастанию некоторых функций параметра p . Последующие вычисления дают нам подходящее значение p .

Гиперграфы, обладающие свойством B

Напомним определения (см. лекцию 2).

Определение 1. Пара $H = (V, E)$, где V — конечное множество, элементы которого называются **вершинами**, а E — некоторое семейство подмножеств множества V , называемых **рёбрами**, называется **гиперграфом**.

Определение 2. Гиперграф называется **n -однородным**, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Определение 3. Говорят, что гиперграф обладает свойством B (или что его вершины можно раскрасить в два цвета), если существует раскраска множества V в два цвета, такая, что никакое ребро не является монохроматическим.

Свойство B . Перекраска

Пусть $m(n)$ — минимальное число рёбер n -однородного гиперграфа, который не обладает свойством B .

В ходе лекции 2 была доказана следующая теорема.

Теорема 1 ([2] Эрдёш, 1963). Каждый n -однородный гиперграф с числом рёбер, меньшим 2^{n-1} , обладает свойством B , т. е.

$$m(n) \geq 2^{n-1}.$$

Используя перекраску, мы сейчас докажем более сильное утверждение о том, что $m(n) = \Omega(2^n (n/\ln n)^{1/2})$, $n \rightarrow \infty$.

Этот результат принадлежит Радхакришнану и Шринивасану ([4], 2000), которые использовали методы, изложенные в работе Бека ([3], 1978).

Свойство В. Перекраска

Теорема 2 ([4] Radhakrishnan and Srinivasan, 2000).

Пусть задано произвольное $n \in \mathbb{N}$. Если найдутся числа $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [0,1]$, такие, что $k(1-p)^n + k^2 p < 1$, то $m(n) > 2^{n-1} k$.

Следствие. Справедливо равенство

$$m(n) = \Omega(2^n (n/\ln n)^{1/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство следствия. Используем известное неравенство $1-p \leq e^{-p}$. Функция $k(1-p)^n + k^2 p$ принимает наименьшее значение, меньшее, чем значение при $p = \ln(n/k)/n$. При этом значении p получим $\frac{k^2}{n} [1 + \ln(n/k)] < 1$.

Тем самым, условие теоремы 2 выполнено. Это неравенство справедливо при $k = c(n/\ln n)^{1/2}$ для всех $0 < c < \sqrt{2}$ и достаточно больших n .

Свойство V . Перекраска

Доказательство теоремы 2. Фиксируем произвольные гиперграф $H = (V, E)$ с $m = 2^{n-1}k$ рёбрами и число p , удовлетворяющее условию теоремы.

Опишем рандомизированный алгоритм, приводящий к раскраске множества V . Проведём предварительную обработку случайности: для каждой вершины $v \in V$ бросим сначала первую монету, при этом герб выпадает с вероятностью $1/2$, а затем, для некоторых вершин — вторую монету, при этом герб выпадает с вероятностью p (представляя потенциальную перекраску).

Вдобавок заметим (это важно!), что вершины из множества V упорядочены случайно.

Свойство *B*. Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение).

Шаг 1. Раскрасим вершину $v \in V$ в красный цвет, если при соответствующем подбрасывании первой монеты выпал герб. В противном случае, раскрасим её синим. Назовём это **первой раскраской**. Обозначим через D (от «dangerous») множество [«опасных»] вершин $v \in V$, которые лежат в некотором (возможно, в нескольких) монохроматическом ребре $e \in E$.

Шаг 2. Рассмотрим элементы множества D последовательно в (случайно выбранном) порядке на V . Вершина d рассматривается как «**всё ещё опасная**», если существует некоторое ребро $e \in E$ (их может быть несколько), содержащее d и являвшееся монохроматическим при первой раскраске, для которого ни одна вершина ещё не изменила цвет.

Свойство *V*. Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение). Если *d* не является всё ещё опасной, то не делаем ничего. Если является, то бросаем вторую монету. Если выпадает герб, то изменяем цвет вершины *d*, иначе ничего не меняем. Назовём раскраску **финальной**, если она стабилизировалась и далее не меняется.

Будем говорить, что **алгоритм срывает неудачно**, если в результате раскраски некоторое ребро оказывается монохроматическим. Оценим вероятность ошибки сверху величиной $k(1 - p)^n + k^2 p$. Предположение теоремы тогда гарантирует нам, что с положительной вероятностью алгоритм заканчивается успешно. Значит, существует способ применения алгоритма, приводящий к финальной раскраске без монохроматических рёбер *e*, а тем самым существует **2** – раскраска множества *V* без монохроматических рёбер.

Свойство B . Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение).

Для определённости оценим вероятность того, что некоторое ребро $e \in E$ в финальной раскраске является красным. Вероятность неудачного срабатывания алгоритма превышает её не более чем в два раза.

Ребро $e \in E$ может оказаться красным в финальной раскраске в двух случаях. Либо e было красным после первой раскраски и остаётся таковым до финальной раскраски, либо e не было красным после первой раскраски, но стало красным при финальной раскраске. (Из описания алгоритма следует, что вершина не могла изменить цвет более одного раза.) Пусть A_e будет первым событием, а C_e — вторым. Тогда

$$\Pr[A_e] = 2^{-n}(1 - p)^n.$$

Свойство *B*. Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение).

Если все подбрасывания сделаны, то ни одна из вершин $v \in e$ не перекрасится на шаге 2. Наоборот, если при каком-либо подбрасывании на втором шаге выпал герб для некоторой вершины $v \in e$, то существует **первая** (в данном упорядочении) вершина v , для которой выпал герб. Когда эта вершина v была ещё опасной, ребро e было монохроматическим, и поэтому v ждала выпадения герба на втором шаге для изменения своего цвета. Имеем

$$2 \sum_{e \in E} \Pr[A_e] = k(1 - p)^n,$$

что является первым слагаемым вероятности неудачи.

Переходим теперь к хитроумной оценке вероятности $\Pr[C_e]$.

Свойство В. Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение). Для различных рёбер $e, f \in E$ будем говорить, что e осуждает f , если

- Рёбра e, f пересекаются в точности по одной вершине (обозначим её через v);
- при первой раскраске ребро f было синим, а ребро e при финальной раскраске стало красным;
- на шаге 2 вершина v была **последней** из принадлежащих ребру e , которая изменила синий цвет на красный;
- когда v меняет свой цвет, ребро f всё ещё полностью синее.

Предположим, что имеет место событие C_e . Некоторые вершины ребра e меняют цвет с синего на красный так, что существует **последняя** вершина v , изменившая цвет.

Свойство *B*. Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение).

Но почему v требует бросания монеты? Она должна быть всё ещё опасной. То есть, v должна лежать хотя бы в одном множестве f , которое является синим при первой раскраске и остаётся всё ещё синим в момент, когда v рассматривается.

Могут ли e и f пересекаться по некоторой другой вершине v' ? Нет! Иначе эта вершина v' обязательно была бы синей при первой раскраске (так как $v' \in f$) и красной при финальной раскраске (поскольку $v' \in e$). Но тогда v' меняет цвет раньше, чем v . Значит, f не является полностью синим, когда v рассматривается, и поэтому e не может осуждать f . Следовательно, когда C_e имеет место, e осуждает некоторое f .

Свойство B . Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение). Введём событие

$$B_{ef} = \text{«}e \text{ осуждает } f\text{»}.$$

Тогда

$$\sum_e \Pr[C_e] \leq \sum_{e \neq f} \Pr[B_{ef}].$$

Поскольку существует меньше, чем $(2^{n-1}k)^2$ пар $e \neq f$, теперь достаточно показать, что $\Pr[B_{ef}] \leq 2^{1-2n}p$.

Фиксируем произвольные рёбра $e, f \in E$ такие, что $e \cap f = \{v\}$ (иначе B_{ef} не может произойти). Случайное упорядочение множества V порождает случайный порядок σ на $e \cup f$. Пусть $i = i(\sigma)$ обозначает число вершин $v' \in e$, встречающихся перед v в этом порядке, и пусть $j = j(\sigma)$ есть число вершин $v' \in f$, встречающихся перед v .

Свойство B . Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение). Фиксируя σ , имеем

$$\Pr[B_{ef}|\sigma] \leq \frac{p}{2} \cdot 2^{-n+1} (1-p)^j 2^{-n+1+i} \left(\frac{1+p}{2}\right)^i.$$

Будем рассматривать множители по одному.

- 1) Вершина v сама должна быть сначала синей и превратиться в красную;
- 2) Все другие вершины $v' \in f$ должны быть сначала синими;
- 3) Все $v' \in f$ встречаются раньше, чем v при перекраске;
- 4) Вершины $v' \in e$, встречающиеся после v , должны быть вначале красными (так как v — последняя вершина множества e , которая меняет цвет);
- 5) Все $v' \in e$, встречающиеся перед v , должны либо сначала быть красными, либо сначала быть синими, но перекраситься в красный.

Свойство B . Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение).

$$\Pr[B_{ef}|\sigma] \leq \frac{p}{2} \cdot 2^{-n+1} (1-p)^j 2^{-n+1+i} \left(\frac{1+p}{2}\right)^i.$$

Последний множитель можно оценить сверху достаточно точно. Те вершины $v' \in e$, которые встречаются перед v и являлись сначала синими, не только требуют второго подбрасывания монеты и выпадения герба, но, кроме того, сами должны лежать в некотором ребре $e' \in E$, ставшем монохроматическим после первой раскраски. Попытки дальнейшего улучшения оценок величины $m(n)$ часто концентрируются на этом, но (до сих пор!) они оказывались безуспешными. Теперь мы имеем

$$\Pr[B_{ef}] \leq 2^{1-2n} p \mathbb{E}[(1+p)^i (1-p)^j],$$

Свойство B . Перекраска

Доказательство теоремы 2 (продолжение).

$$\Pr[B_{ef}] \leq 2^{1-2n} p \mathbf{E}[(1+p)^i (1-p)^j],$$

где математическое ожидание берётся при равновероятном выборе упорядочения σ . Следующая жемчужина завершает доказательство.

Лемма. Справедлива оценка $\mathbf{E}[(1+p)^i (1-p)^j] \leq 1$.

Доказательство леммы. Зафиксируем некоторое соответствие между $e \setminus \{v\}$ и $f \setminus \{v\}$, держа в уме м-ра и миссис Джонс, м-ра и миссис Смит, и т. д. Никаких ограничений на количество лиц, которые приходят перед v , в паре нет (двое Джонсонов, один Смит, никого из Тейлоров, и т. д.).

Свойство *B*. Перекраска

Лемма. Справедлива оценка $E[(1 + p)^i(1 - p)^j] \leq 1$.

Доказательство леммы (окончание). Математическое ожидание величины $(1 + p)^i(1 - p)^j$ раскладываем на множители для каждой пары. В случае отсутствия Тейлоров соответствующий множитель отсутствует. Если Джонсонов двое, присутствует множитель $(1 + p)(1 - p) \leq 1$. Если Смит один, то с равной вероятностью присутствует ровно один из множителей $(1 + p)$ или $(1 - p)$. Таким образом, условное математическое ожидание заменяется множителем 1. Каждый множитель не превышает 1, поэтому их произведение не больше 1. ■

Теорема 2 доказана. ■

Литература к лекции

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, с. 49-53.
2. Erdős P. (1963) On a combinatorial problem, I // *Nordisk Mat. Tidskr.* **11**, pp. 5-10.
3. Beck J. (1978) On 3-chromatic hypergraphs // *Disc. Math.* **24**(2): pp. 127-137.
4. Radhakrishnan J. and Srinivasan A. (2000) Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring // *Random Structures and Algorithms* **16**: pp. 4-32.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!