Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 6

Проблемы достижимости и живости
для сетей Петри

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Достижимость $\leftrightarrow$ 0-достижимость

Напоминание: разметка M достижима в маркированной сети Петри π ($M \in R(\pi)$), если существует вычисление сети π, оканчивающееся разметкой M

Проблема достижимости для сетей Петри формулируется так: для заданной маркированной сети Петри π и заданной разметки M проверить соотношение $M \in R(\pi)$

Проблема 0-достижимости для сетей Петри формулируется так: для заданной маркированной сети Петри π проверить соотношение $\langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle \in R(\pi)$

Достижимость $\leftrightarrow$ 0-достижимость

Теорема. Проблемы достижимости и 0-достижимости m-сводятся друг к другу

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{R}$ — проблема достижимости и $\mathfrak{R}^0$ — проблема 0-достижимости

Так как $\mathfrak{R}^0$ — это частный случай $\mathfrak{R}$ для разметки $\mathbf{0} = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$, то и m-сводимость $\mathfrak{R}^0$ к $\mathfrak{R}$ очевидна: m-сводящий алгоритм преобразует вход π (сеть Петри) к задаче $\mathfrak{R}^0$ во вход $(\pi, \mathbf{0})$ к $\mathfrak{R}$

Осталось показать, что проблема достижимости m-сводится к проблеме 0-достижимости

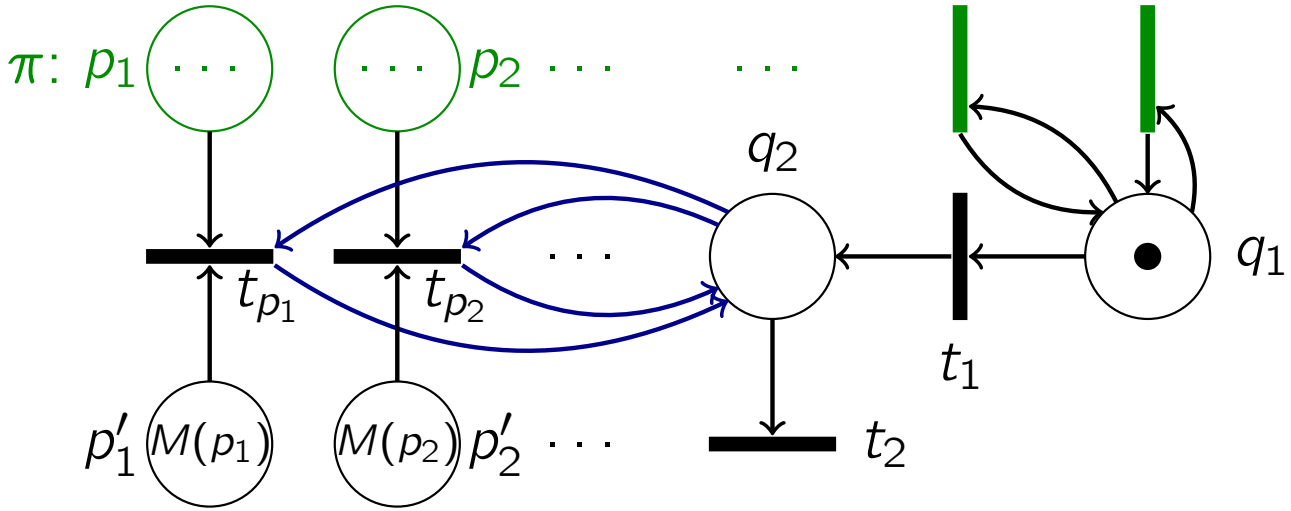
По определению m-сводимости, для этого достаточно показать, как для заданных сети Петри π и разметки M построить сеть Петри π_M, для которой верно следующее:

$$M \in R(\pi) \Leftrightarrow \mathbf{0} \in R(\pi_M)$$

Достижимость $\leftrightarrow$ 0-достижимость

Доказательство. (достижимость $(\pi,\ M) \to$ 0-достижимость (π_M))

Рассмотрим произвольную сеть $\pi = (P, T, E, W, M_0)$

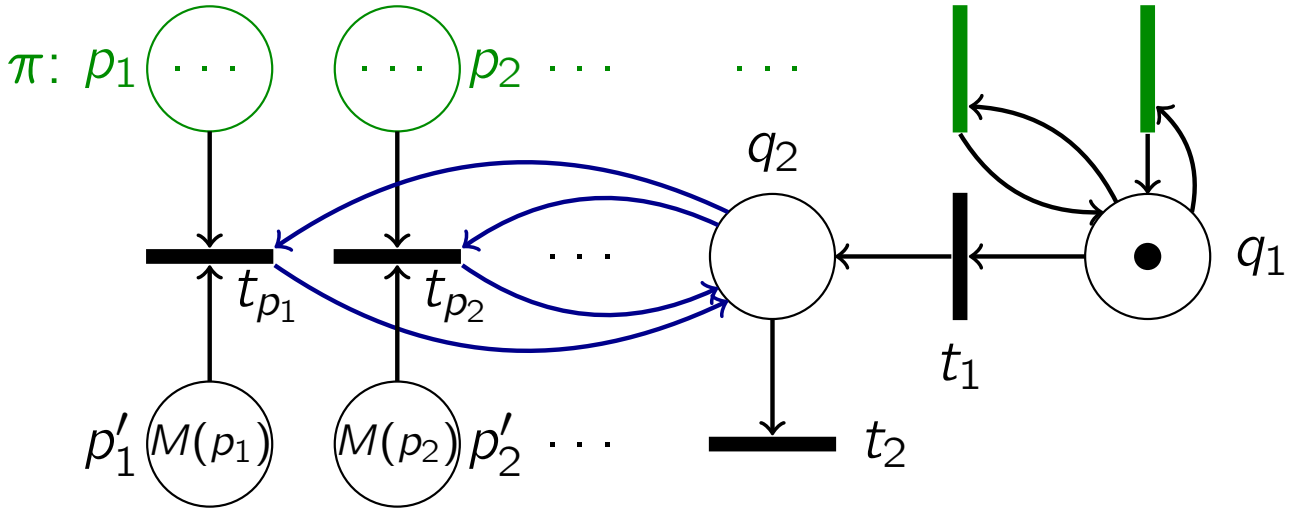


Добавим в сеть следующие позиции и переходы, получив π_M:

- позицию q_1 с одной фишкой, и для $\forall t \in T$ — дýги $q_1 \to t$ и $t \to q_1$
- для $\forall p \in P$ — позицию p' с $M(p)$ фишками
- для $\forall p \in P$ — переход t_p, забирающий по фишке из p и p'
- позицию q_2 без фишек, и для $\forall p \in P$ — дýги $q_2 \to t_p$ и $t_p \to q_2$
- переход t_1, перемещающий фишку из q_1 в q_2
- переход t_2, удаляющий фишку из q_2

Достижимость $\leftrightarrow$ 0-достижимость

Доказательство. (достижимость $(\pi, M) \to$ 0-достижимость (π_M))



Пока в q_1 лежит фишка, подсеть π сети π_M выполняется точно так же, как и исходная сеть π

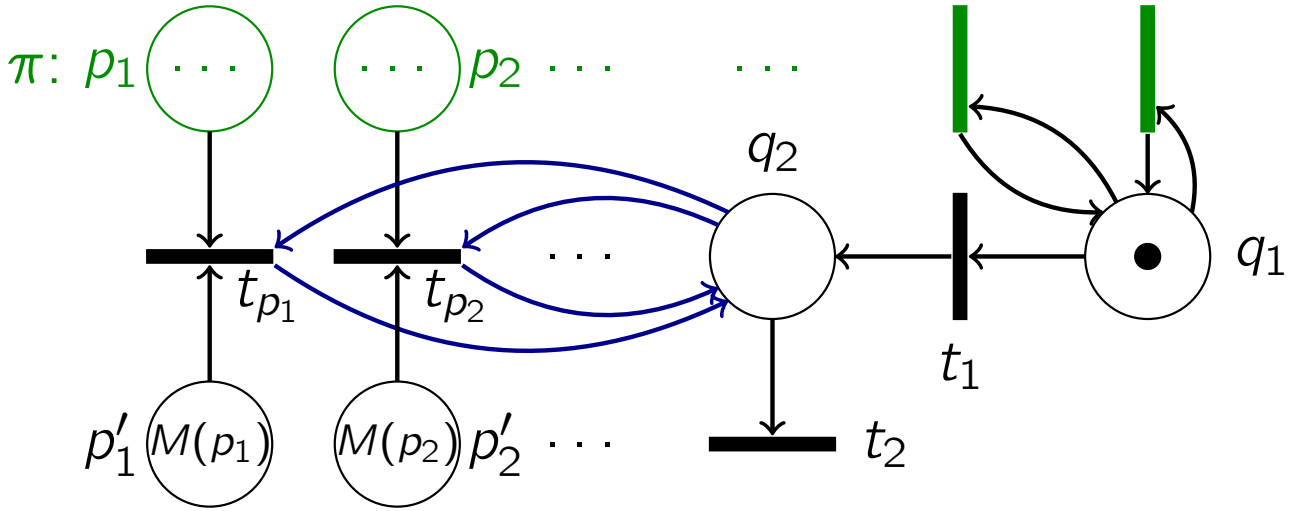
Когда фишка перемещается из q_1 в q_2, все переходы подсети π становятся неактивными

Пока в q_2 лежит фишка, выполнением перехода t_p, $p \in P$, можно «синхронно» удалять фишки из p и p', пока не кончатся фишки в p или p'

После удаления фишки из p_2 все переходы сети π_M становятся неактивными

Достижимость $\leftrightarrow$ 0-достижимость

Доказательство. (достижимость $(\pi,\ M) \to$ 0-достижимость (π_M))



Чтобы получить разметку $\mathbf{0}$ в π_M, необходимо и достаточно сделать следующее:

1. Получить раскладку фишек M в подсети π
2. Переместить фишку из q_1 в q_2
3. «Синхронно» удалить все фишки, кроме лежащей в q_2
4. Удалить фишку из q_2

Эти действия возможны и приводят к разметке $\mathbf{0}$ в том и только том случае, если разметка M достижима в π ▼

Достижимость $\leftrightarrow$ ограниченная достижимость

Будем говорить, что M является ∞-разметкой, если она является разметкой или предельной разметкой

Проблему ограниченной достижимости для сетей Петри сформулируем так: для заданной маркированной сети Петри π и заданного конечного множества ∞-разметок $\mathcal{M}$ проверить, существует ли разметка K, такая что $K \in R(\pi)$ и $\exists M \in \mathcal{M} : K \preceq M$

Теорема. Проблемы 0-достижимости и ограниченной достижимости m-сводятся друг к другу

Доказательство. Попробуйте самостоятельно

0-достижимость $\to$ живость

Напоминание:

- Переход t называется живым, если для любой достижимой разметки M существует разметка K, такая что $M \xrightarrow{\pi}{}^{*} K$ и t активен в K
- Сеть называется живой, если все её переходы живы

Проблема живости для сетей Петри формулируется так: для заданной маркированной сети Петри π проверить, является ли эта сеть живой

Теорема. Дополнение проблемы 0-достижимости m-сводится к проблеме живости

Доказательство.

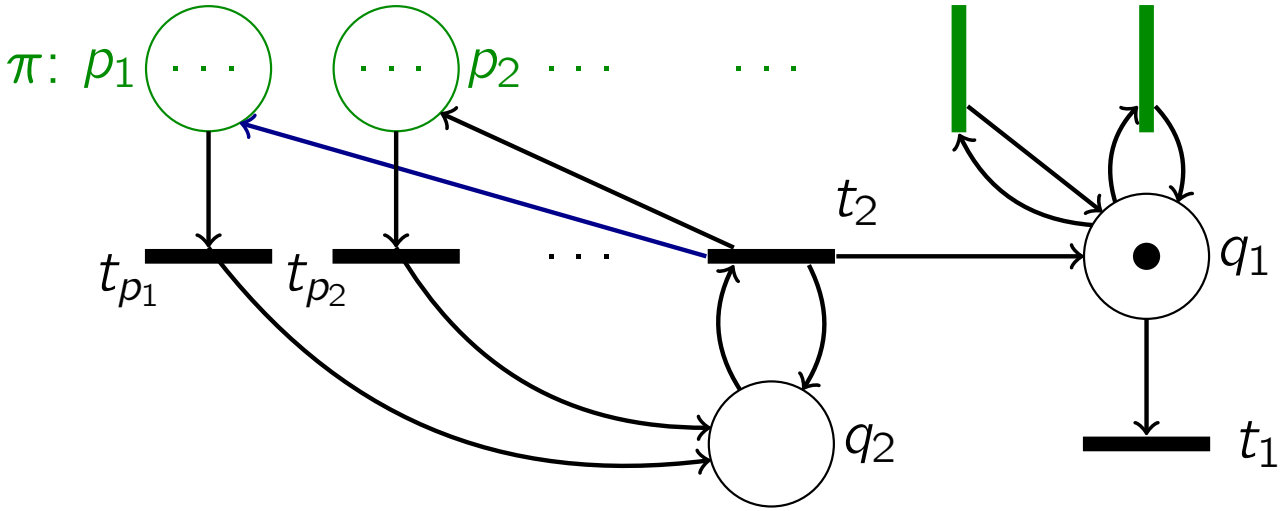
По определению m-сводимости, достаточно показать, как по заданной сети Петри π построить сеть Петри π_ℓ, такую что

$$\mathbf{0} \notin R(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_\ell \text{ жива}$$

0-достижимость $\to$ живость

Доказательство. ($\mathbf{0} \notin R(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_\ell$ жива)

Рассмотрим произвольную сеть $\pi = (P, T, E, W, M_0)$

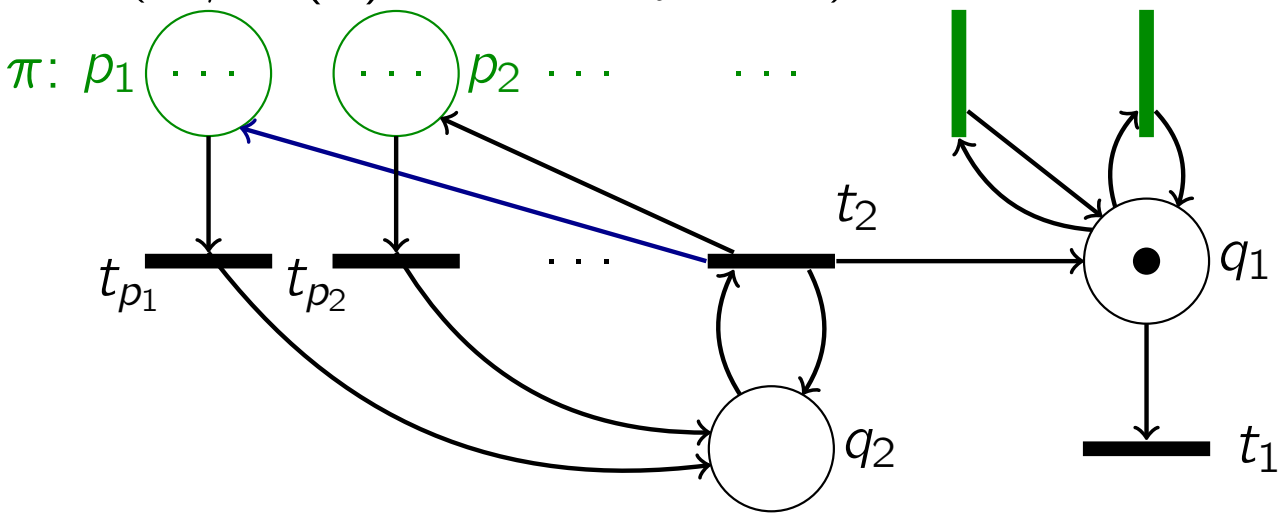


Добавим в сеть следующие позиции и переходы, получив π_ℓ:

- позицию q_1 с одной фишкой и дуги как в предыдущем доказательстве
- переход t_1, удаляющий фишку из q_1
- позицию q_2 без фишек и переход t_2, порождающий фишки во всех остальных позициях, если в q_2 лежит хотя бы одна фишка
- для $\forall p \in P$ — переход t_p, перемещающий фишку из p в q_2

0-достижимость $\to$ живость

Доказательство. ($\mathbf{0} \notin R(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_\ell$ жива)



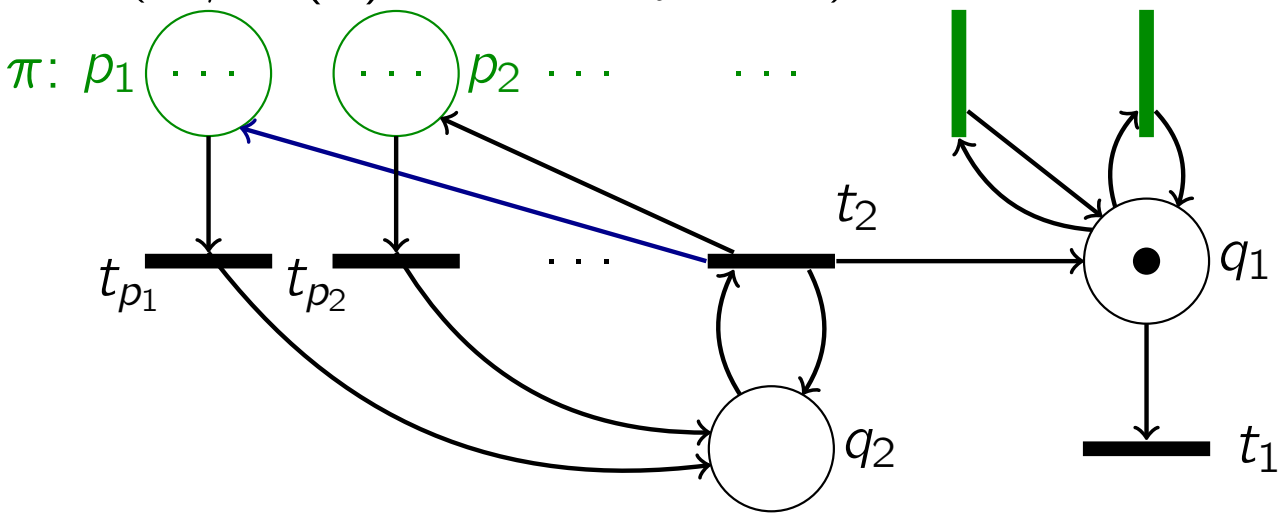
Если в π достижима разметка $\mathbf{0}$, то в π_ℓ содержится такое вычисление:

1. Удалить из подсети π все фишки тем способом, которым достигается разметка $\mathbf{0}$
2. Удалить фишку из q_1

Последняя разметка такого вычисления ($\mathbf{0}$) является тупиковой, а значит, ни один переход π_ℓ не является живым

0-достижимость $\to$ живость

Доказательство. ($\mathbf{0} \notin R(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_\ell$ жива)



Если в π недостижима разметка $\mathbf{0}$, то любая достижимая в π разметка M содежит хотя бы одну фишку хотя бы в одной позиции

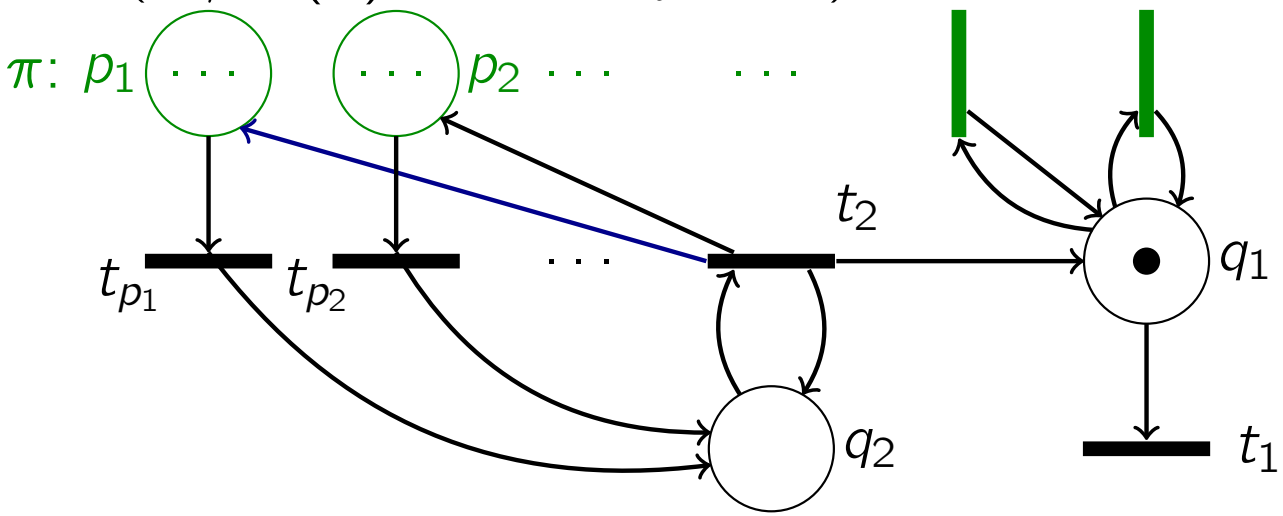
Тогда для любой достижимой разметки сети π_ℓ хотя бы одно из двух:

1. В q_2 лежит хотя бы одна фишка (если хотя бы раз сработал один из переходов t_p)
2. В позициях подсети π_ℓ лежит хотя бы одна фишка (иначе)

Из (1) можно получить (2), выполнив один из переходов вида t_p

0-достижимость → живость

Доказательство. ($\mathbf{0} \notin R(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_\ell$ жива)



2. В позициях подсети π_ℓ лежит хотя бы одна фишка (иначе)

Для (2) можно продолжить вычисление сети так, чтобы каждый переход выполнился хотя бы один раз:

- Срабатыванием t_2 породить достаточно много фишек во всех позициях, кроме q_2
- Последовательно по одному разу выполнить все переходы, кроме t_2

Значит, каждый переход жив, и вся сеть является жива (*если разметка* $\mathbf{0}$ *недостижима в* π) ▼

Живость $\to$ достижимость

∞-разметку M назовём t-тупиковой для перехода t сети Петри π, если t не активен ни в одной разметке из $R(\pi, M)$

Определение живости тогда переформулируется так: маркированная сеть является живой, если из её начальной разметки не достижима ни одна t-тупиковая разметка ни для одного перехода t

$D_t(\pi)$ — так обозначим множество всех t-тупиковых ∞-разметок сети π

Лемма 1. Для любой пары ∞-разметок M, K верно следующее: если $M \in D_t(\pi)$ и $K \preceq M$, то $K \in D_t(\pi)$

Доказательство. Напрямую следует из определения t-тупиковости разметки и монотонности сетей Петри (*очевидно справедливой и для предельных разметок*) ▼

Живость $\to$ достижимость

$\mathbb{N}$ — так будем обозначать множество всех натуральных чисел ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)

Для последовательности ∞-разметок $\alpha = (M_1, M_2, \dots)$ записью $sup(\alpha)$ обозначим такую ∞-разметку:

$$sup(\alpha)(p) = \begin{cases} M_i(p), & \text{если для любого } j \in \mathbb{N} \text{ верно } M_j(p) \leq M_i(p) \\ \infty & \text{иначе} \end{cases}$$

Лемма 2. Для любой последовательности $\alpha = (M_1 \prec M_2 \prec M_3 \prec \dots)$ ∞-разметок множества $D_t(\pi)$ верно $sup(\alpha) \in D_t(\pi)$

Доказательство. Попробуйте сами

Живость $\to$ достижимость

$D_t^{max}(\pi)$ — так для сети Петри π и перехода t множество разметок, максимальных в $D_t(\pi)$ относительно отношения $\prec$

Лемма 3. Для любых сети Петри π и перехода t множество $D_t^{max}(\pi)$ конечно

Доказательство.

Предположим от противного, что множество $D_t^{max}(\pi)$ бесконечно

Тогда, по лемме о неубывающей цепи разметок, существует бесконечная последовательность разметок из $D_t^{max}(\pi)$, монотонно возрастающая относительно $\prec$

Но тогда для первых двух элементов M_1, M_2 этой последовательности верно $M_1 \prec M_2$, а значит, разметка M_1 не максимальна в $D_t(\pi)$ (*противоречие*) ▼

Живость $\to$ достижимость

Лемма 4. Для любых сети Петри π и перехода t верно:
$D_t(\pi) = \{M \mid \exists K \in D_t^{max}(\pi) : M \preceq K\}$

Доказательство.

Предположим от противного, что $D_t(\pi) \neq \{M \mid \exists K \in D_t^{max}(\pi) : M \preceq K\}$

По лемме 1, если $M \in D_t(\pi)$, то и для каждой ∞-разметки M', такой что $M' \preceq M$, верно $M' \in D_t(\pi)$

Следовательно, $D_t(\pi) \supseteq \{M \mid \exists K \in D_t^{max}(\pi) : M \preceq K\}$

Тогда, согласно предположению, в $D_t(\pi)$ содержится ∞-разметка M_0, такая что $M_0 \not\preceq K$ для всех $K \in D_t^{max}(\pi))$

Живость $\to$ достижимость

Доказательство (леммы 4). $(M_0 \in D_t(\pi), \quad \forall K \in D_t^{max}(\pi) : M_0 \not\preceq K)$

Без ограничения общности рассмотрим разметку M_0 со значением ∞ для наибольшего числа позиций

∞-разметка M_0 не является максимальной в $D_t(\pi)$, а значит, существует ∞-разметка M_1, такая что $M_0 \prec M_1$

Но тогда $M_1 \in D_t(\pi)$ и $M_1 \not\preceq K$

Повторяя рассуждения, применявшиеся к M_0, получим последовательность $\alpha = (M_0 \prec M_1 \prec M_2 \prec \dots)$ ∞-разметок множества $D_t(\pi)$, не максимальных в $D_t(\pi)$

По лемме 2, $M_\infty = sup(\alpha) \in D_t(\pi)$

При этом $M_\infty \not\prec K$ для всех $K \in D_t^{max}(\pi)$, и M_∞ принимает значение ∞ для большего числа позиций, чем M_0 (*противоречие*) ▼

Живость $\to$ достижимость

Лемма 5. Существует алгоритм, для любых сети Петри π и перехода t вычисляющий множество $D_t^{max}(\pi)$

Доказательство.

Решить задачу вычисления $D_t^{max}(\pi)$ можно так

Существует алгоритм проверки t-тупиковости заданной ∞-разметки M:

- Построим полное дерево Γ покрытия π с начальной разметкой M (конечное по соответствующей теореме)
- Ответ — 1 (разметка тупиковая) $\Leftrightarrow$ в Γ нет переходов с меткой t

Перебором с применением этого алгоритма вычислим множество всех t-тупиковых ∞-разметок, принимающих только значения 0 и ∞, и выделим среди всех таких разметок максимальные

Живость $\to$ достижимость

Доказательство (леммы 5).

Если выделена одна ∞-разметка, принимающая только значения ∞, то объявим её единственной максимальной, а иначе для каждой выделенной ∞-разметки M перебором найдём все максимальные ∞-разметки, бóльшие M относительно $\prec$:

- Выделим все позиции $p_1, \ldots, p_n$, такие что $M(p_i) = 0$
- Будем (потенциально бесконечно) перебирать все ∞-разметки K, получающиеся из M увеличением значений в $p_1, \ldots, p_n$, по возрастанию значения $\nu = K(p_1) + \cdots + K(p_n)$ (номера слоя)
- ∞-разметка K объявляется максимальной, если она t-тупиковая и все ∞-разметки в следующем слое, бóльшие K относительно $\prec$, не являются t-тупиковыми

Согласно способу выделения разметок и леммам 1–3, обозначенный перебор обязательно завершится за конечное число шагов, и объявленные ∞-разметки являются всевозможными максимальными t-тупиковыми ▼

Живость $\to$ достижимость

Теорема. Дополнение проблемы живости m-сводится к проблеме ограниченной достижимости

Доказательство.

Сеть $\pi = (P, T, E, W, M_0)$ нежива

$\Leftrightarrow$ (определение t-тупиковости)

В π достижима хотя бы одна t-тупиковая разметка

$\Leftrightarrow$ (лемма 4)

В π достижима хотя бы одна разметка M, такая что
$\exists K \in \bigcup\limits_{t \in T} D_t^{max}(\pi) : M \preceq K$

$\Leftrightarrow$ (формулировка проблемы ограниченной достижимости)

Задача ограниченной достижимости для π и $\bigcup\limits_{t \in T} D_t^{max}(\pi)$ имеет ответ 1

При этом по лемме 5 существует алгоритм, для произвольной сети π вычисляющий множество $\bigcup\limits_{t \in T} D_t^{max}(\pi)$ ▼

Заключение

Следствие. **Следующие проблемы или их дополнения m-сводятся друг к другу:**

- **Проблема достижимости**
- **Проблема 0-достижимости**
- **Проблема ограниченной достижимости**
- **Проблема живости**

Соответствующие сводимости были показаны конструктивно, а значит, если предложить алгоритм решения хотя бы одной из этих проблем, то из него и соответствующего m-сводящего алгоритма будет получен алгоритм решения любой другой проблемы (согласно теореме об m-сводимости)

Заключение

Теорема. **Проблема достижимости для сетей Петри алгоритмически разрешима**

Доказательство. Можете попробовать сами (и это очень трудно!)

Следствие. **Проблемы достижимости, 0-достижимости, ограниченной достижимости и живости для сетей Петри алгоритмически разрешимы**

Проблема достижимости для сетей Петри весьма трудна (по крайней мере ExpSPACE-трудна)

Алгоритмы решения этой проблемы известны уже довольно давно (1981, E. Mayr), однако сложность всех известных сейчас алгоритмов решения этой проблемы не является примитивно рекурсивной (*то есть очень и очень высока*)

Поэтому нередко обсуждение проблемы достижимости завершается формулировкой факта её разрешимости — так поступим и здесь