Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Вне программы 06

Формальная арифметика
Теорема Гёделя о неполноте

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Строгие доказательства чего-либо «содержательного» непохожи друг на друга, но единообразно задаются двумя компонентами:

1. Логическое исчисление для структурирования записи высказываний
2. Набор $\mathcal{T}$ высказываний (формул), описывающих специальные свойства используемых понятий и разрешённых к использованию без доказательства

Точный способ «встраивания» набора $\mathcal{T}$ в доказательство высказывания φ в исчислении можно определять по-разному с одним и тем же итогом:

- Это аксиомы, добавляемые к исчислению гильбертовского типа
- Это обозначение того, что в натуральном исчислении требуется доказать секвенцию вида $\mathcal{T} \vdash \varphi$
- Это множество логических формул, для которого требуется доказать логическое следование $\mathcal{T} \models \varphi$

Независимо от выбора одного из этих способов такой набор $\mathcal{T}$ имеет популярное название «аксиоматическая теория», и его элементы принято называть аксиомами

Для примера попробуем порассуждать о том, как могла бы выглядеть теория первого порядка (аксиоматическая теория, состоящая из формул логики предикатов первого порядка), описывающая «привычную» арифметику над $\mathbb{N}_0$

Для начала следует определиться с сигнатурой

Рассмотрим такую сигнатуру (её иногда называют сигнатурой формальной арифметики):

- 0 — константа, которой хочется придать смысл числа 0
- $s^{(1)}$ — функциональный символ, который хочется трактовать так: $s(x) = x + 1$
- $+^{(2)}$ и $\cdot^{(2)}$ — функциональные символы, которым хочется придать смысл операция сложения и умножения чисел
- $=^{(2)}$ — предикатный символ, которому хочется придать смысл равенства чисел

Попробуем порассуждать о том, чего можно было бы хотеть от

- аксиоматической теории в целом и
- теории, описывающей свойства символов выше, в частности

Если аксиоматическая теория разрабатывается для набора символов с конкретным однозначным смыслом, то это значит, что она разрабатывается для одной конкретной интерпретации $\mathcal{I}$

Теория интерпретации $\mathcal{I}$ — это аксиоматическая теория (множество формул логики предикатов), моделью которой является $\mathcal{I}$

Формальная арифметика — это теория такой интерпретации Ar (арифметической интерпретации над $\mathbb{N}_0$):

- Сигнатура состоит из символов 0, s, $+$, $\cdot$ и $=$ как рассказывалось недавно
- Предметная область — $\mathbb{N}_0$
- Все символы сигнатуры оцениваются естественным арифметическим способом: число 0, операция «$+1$», операции сложения и умножения чисел, отношение равенства чисел

Примеры формальных арифметик

Тривиальная арифметика: $\emptyset$

Арифметика Пеано:

$$\left\{\begin{array}{c}
\forall x\,(x+0=x) \qquad \forall x\,\forall y\,(x+\mathbf{s}(y)=\mathbf{s}(x+y)) \\[2ex]
\forall x\,(x\cdot 0=0) \qquad \forall x\,\forall y\,(x\cdot\mathbf{s}(y)=x\cdot y+x) \\[2ex]
\forall x\,(x=x) \qquad \forall x\,\forall y\,((x=y)\rightarrow(y=x)) \\
\forall x\,\forall y\,\forall z\,((x=y)\,\&\,(y=z)\rightarrow(x=z)) \\[2ex]
\forall x\,\forall y\,((x=y)\rightarrow(\mathbf{s}(x)=\mathbf{s}(y))) \qquad \forall x\,\forall y\,((\mathbf{s}(x)=\mathbf{s}(y))\rightarrow(x=y)) \\[2ex]
\forall x\,\neg(0=\mathbf{s}(x)) \\
\varphi\{x/0\}\,\&\,\forall x\,(\varphi\rightarrow\varphi\{x/\mathbf{s}(x)\})\rightarrow\forall x\,\varphi
\end{array}\right\}$$

В последней строке записана схема аксиом индукции с параметром φ — произвольной формулой с единственной свободной переменной x

Хотелось бы устроить теорию так, чтобы она как можно более «точно» («полно») описывала свойства используемых понятий

Один из способов определения такой «полноты» устроен так

Аксиоматическая теория $\mathcal{T}$ полна, если для любого предложения φ верно хотя бы одно из двух:

- $\mathcal{T} \models \varphi$
- $\mathcal{T} \models \neg\varphi$

Полноту можно понимать так

Пусть $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}$

Для каждого предложения ψ верно либо $\mathcal{I} \models \psi$, либо $\mathcal{I} \not\models \psi$ (и тогда $\mathcal{I} \models \neg\psi$)

Полнота $\mathcal{T}$ означает, что свойства $\mathcal{I}$ отражены в $\mathcal{T}$ настолько точно, что во всех этих соотношениях $\mathcal{I}$ можно заменить на $\mathcal{T}$

Например, арифметика $\emptyset$ очевидно неполна

А про арифметику Пеано неочевидно — это будет чуть дальше

Помимо полноты теории и адекватного соответствия её выбранной интерпретации, хотелось бы *по крайней мере* хоть сколь-нибудь удобно обращаться с теорией как с (возможно, бесконенчным) множеством

Множество X, $X \subseteq \mathbb{N}_0$, перечислимо, если существует не завершающийся алгоритм $\mathcal{A}$ без входа, перечисляющий элементы X:

- В $\mathcal{A}$ есть действие «выдать (перечислить) указанное число»
- $\mathcal{A}$ выдаёт только элементы X
- Каждый элемент X выдаётся $\mathcal{A}$ хотя бы один раз

Перечислимость множества чисел X можно считать самым слабым требованием хоть сколь-нибудь удобной алгоритмической работы с X:

- При помощи $\mathcal{A}$ можно убедиться, что элемент принадлежит множеству, за конечное время
- Если невозможно перечислить X, то невозможно сделать и что-либо более «простое», что обычно требуется для множеств в алгоритмах

Теория — это не множество чисел, а множество формул, хотелось бы уметь и к таким множествам применять понятие перечислимости

Гёделева нумерация элементов множества S — это всюду определённое отображение $g : S \to \mathbb{N}_0$, такое что существуют

- обратное частично определённое отображение $g^{-1} : \mathbb{N}_0 \to S$ и
- алгоритмы, реализующие g и g^{-1}

Теория $\mathcal{T}$ называется перечислимой, если существует гёделева нумерация g формул логики предикатов, для которой перечислимо множество $\{g(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{T}\}$

Теорема (Гёделя о неполноте)
Не существует перечислимой полной формальной арифметики

Основная идея одного из доказательств: в перечислимой полной формальной арифметике обязательно содержится парадокс лжеца — предложение, арифметический смысл которого означает, что это предложение ложно

Следствие. Арифметика Пеано неполна

(*Так как она очевидно перечислима*)

Следствие
Задача проверки истинности предложения в Ar неразрешима

(*Иначе была бы перечислима формальная арифметика, состоящая из всех предложений, истинных в Ar*)