Языки описания схем

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Языки описания схем)

Блок 2

Вспоминаем дискретную математику:
- булевы функции,
- булевы формулы
- схемы из функциональных элементов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020, осенний семестр

Булевы функции, таблицы значений

$B = \{0, 1\}$ — булево множество (множество булевых значений)
(*в курсе "Дискретная математика" бакалавриата это было* E_2)

Булева функция местности n — это отображение $f : B^n \to B$

Способы записи таблицы значений n-местной булевой функции f:

- Одномерный

$x_1, \ldots, x_n$	$f(x_1, \ldots, x_n)$
$\ldots$	$\ldots$
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$	$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
$\ldots$	$\ldots$

- Двумерный

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$f(\widetilde{x}_n)$</td><td colspan="3">$x_{k+1}x_{k+2}\ldots x_n$</td></tr>
<tr><td>$\ldots$</td><td>$\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n$</td><td>$\ldots$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x_1x_2\ldots x_k$</td><td>$\ldots$</td><td>$\ldots$</td><td>$\ldots$</td><td>$\ldots$</td></tr>
<tr><td>$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$</td><td>$\ldots$</td><td>$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$</td><td>$\ldots$</td></tr>
<tr><td>$\ldots$</td><td>$\ldots$</td><td>$\ldots$</td><td>$\ldots$</td></tr>
</table>

Булевы функции, таблицы значений

Таблицы значений некоторых функций:

Отрицание

x	$\overline{x}/(\neg x)$
0	1
1	0

Дизъюнкция

$(x \vee y)$		$y=0$	$y=1$
x	0	0	1
	1	1	1

Конъюнкция

$(x \,\&\, y)$		$y=0$	$y=1$
x	0	0	0
	1	0	1

Импликация

$(x \to y)$		$y=0$	$y=1$
x	0	1	1
	1	0	1

Сумма по модулю 2

$(x \oplus y)$		$y=0$	$y=1$
x	0	0	1
	1	1	0

Эквивалентность

$(x \sim y)$		$y=0$	$y=1$
x	0	1	0
	1	0	1

Штрих Шеффера

$(x \mid y)$		$y=0$	$y=1$
x	0	1	1
	1	1	0

Стрелка Пирса

$(x \downarrow y)$		$y=0$	$y=1$
x	0	1	0
	1	0	0

Булевы формулы

Синтаксис (*форма записи*) булевых формул над набором булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$ задаётся следующей формой Бэкуса-Наура:

$$\varphi \ ::= \ 0 \ | \ 1 \ | \ x \ | \ f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k),$$

где $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — формулы, x — любая из переменных $x_1, \ldots, x_n$ и f — k-местная булева функция

Замечание: в этом курсе, в отличие от курса “Дискретная математика” бакалавриата, не затрагиваются вопросы полноты систем булевых функций, и в связи с этим в записи формул по умолчанию разрешено использовать все булевы функции

Приоритеты операций, согласно которым в записи формулы принято опускать скобки (по убыванию):

$$\neg, \text{ затем } \&, \text{ затем } \vee, \text{ затем } \oplus \text{ и } \sim, \text{ затем } \to$$

Пример формулы: $x \oplus y \vee (\overline{x} \,\&\, z)$

Булевы формулы

Формулой φ над набором переменных $x_1, \dots, x_n$ реализуется n-местная булева функция $[\varphi]$, определяемая так:

- $[0](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$
- $[1](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$
- $[x_i](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_i$
- $[f(\varphi_1, \dots, \varphi_k)](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f([\varphi_1](\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, [\varphi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n))$

Пример: формулой $(x \oplus y) \vee \overline{x} \,\&\, z$ над переменными x, y, z реализуется трёхместная функция f со следующей таблицей значений:

$f(x,y,z))$		yz = 00	01	10	11
x	0	0	1	1	1
	1	1	0	1	0

Схемы из функциональных элементов

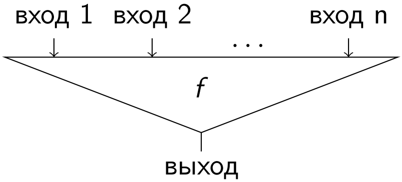
Один из способов представления булевых функций (*и систем булевых функций*), ориентированных на цифровые схемы, — это схемы из функциональных элементов (СФЭ)

СФЭ строится из функциональных элементов (ФЭ)

В ФЭ содержатся:

- булева функция f (*местности* n)
- n входов, пронумерованных числами $1, 2, \dots, n$
- один выход

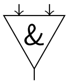
Изображение ФЭ:



Схемы из функциональных элементов

Если в ФЭ содержится n-местная функция f
и на входы посланы булевы значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (α_i — на i-й вход),
то на выходе получается значение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Пример:



- Посылаем $(00) \Rightarrow$ получаем $0 \,\&\, 0$, то есть 0
- Посылаем $(01) \Rightarrow$ получаем $0 \,\&\, 1$, то есть 0
- Посылаем $(10) \Rightarrow$ получаем $1 \,\&\, 0$, то есть 0
- Посылаем $(11) \Rightarrow$ получаем $1 \,\&\, 1$, то есть 1

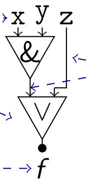
Схемы из функциональных элементов

Как устроена СФЭ:

Набор переменных (входов)

функциональные элементы

Набор выходов



соединения

(“выход” $\to$ “вход”) и

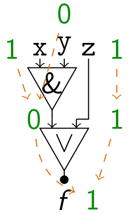
(“переменная” $\to$ “вход”)

Другие особенности СФЭ:

- Выходы ФЭ и переменные могут быть произвольно объявлены выходами
- Выход ФЭ может быть соединён с несколькими входами ФЭ
- Запрещено вводить в СФЭ “цепочку” соединений, начинающуюся на выходе ФЭ и оканчивающуюся на входе того же ФЭ

Схемы из функциональных элементов

Как функционирует СФЭ:



- На входы $x_1, \ldots, x_n$ посылаются булевы значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$
- Значение в любой точке СФЭ "продвигается" вперёд по соединениям
- Значения, "продвинувшиеся" на входы ФЭ, посылаются в этот ФЭ, и на выходе ФЭ появляется соответствующее булево значение
- В каждом выходе схемы реализуется n-местная булева функция f следующего вида:
  $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — значение, появляющееся на этом выходе, если на входы СФЭ посланы значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

Схемы из функциональных элементов

Полное строгое определение СФЭ над набором переменных $x_1, \ldots, x_n$

Это размеченный ациклический ориентированный мультиграф Σ следующего вида:

- Переменные $x_1, \ldots, x_n$ являются вершинами Σ, и эти вершины называются входами
- Во входы не ведёт ни одной дуги
- Каждая вершина, за исключением входов, помечена булевой функцией
- Если вершина помечена k-местной функцией, то в неё ведёт k дуг, и эти дуги пронумерованы числами $1, 2, \ldots, k$
- Некоторые вершины объявлены выходами, и все выходы пронумерованы $(1, 2, \ldots)$

Схемы из функциональных элементов

Полное строгое определение СФЭ над набором переменных $x_1, \dots, x_n$

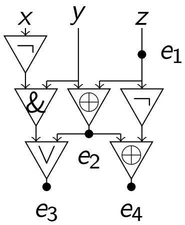
В вершине x, где x — переменная, реализуется функция $[x]$

Если в вершинах $v_1, \dots, v_k$ реализуются функции $[\varphi_1], \dots, [\varphi_k]$ и в СФЭ содержатся дуги $v_1 \xrightarrow{1} v, \dots, v_k \xrightarrow{k} v$, то в вершине v реализуется функция $[f(\varphi_1, \dots, \varphi_k)]$

Схемой реализуется система функций $(f_1, \dots, f_k)$, где k — количество выходов и f_i — функция, реализующаяся в i-м выходе

Схемы из функциональных элементов

Пример напоследок:



Схемой над переменными x, y, z реализуется набор функций

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) = ([z], [y \oplus z], [\neg x \,\&\, y \vee (y \oplus z)], [y \oplus z \oplus \neg z]):$$

x, y, z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$	$f_3(x, y, z)$	$f_4(x, y, z)$
000	0	0	0	1
001	1	1	1	1
010	0	1	1	0
011	1	0	1	0
100	0	0	0	1
101	1	1	1	1
110	0	1	1	0
111	1	0	0	0