Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2018, весенний семестр

Лекция 11–12

Аксиоматические теории

Основные свойства теорий

Формальная арифметика

Арифметика Пеано

Теорема Гёделя о неполноте

Определимость

Арифметика Пресбургера

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$$

Попробуем *доказать* справедливость **арифметического** утверждения φ логическими методами

Для этого придумаем систему предложений Γ, таких что

- $\Gamma \models \varphi$
- все формулы из Γ истинны в целочисленной арифметической интерпретации $\mathcal{I}^{\sigma}_{ar}$ сигнатуры σ:
  - предметная область $\mathcal{I}^{\sigma}_{ar}$ — множество $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
  - символы чисел, арифметических операций и отношений из σ оцениваются соответствующими числами, операциями и отношениями

  (*то есть формулами из* Γ *описываются верные арифметические свойства*)

Тогда по определению логического следования будет верно $\mathcal{I}^{\sigma}_{ar} \models \varphi$: "дважды два — действительно четыре"

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$$

Что такое “**2**” и “**4**”?

- $\mathbf{4}$ — это число, следующее за $\mathbf{3}$: $\mathbf{s}(\mathbf{3})$
  - $\mathbf{s}$ — операция прибавления единицы
- $\mathbf{3}$ — это $\mathbf{s}(\mathbf{2})$
- $\mathbf{2}$ — это $\mathbf{s}(\mathbf{1})$
- $\mathbf{1}$ — это $\mathbf{s}(\mathbf{0})$
- $\mathbf{0}$ пока определять не будем

Начнём с сигнатуры $\sigma = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{ \times^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)} \right\}, \left\{ =^{(2)} \right\} \right\rangle$

Утверждение φ, записанное в сигнатуре σ, выглядит так:

$$\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$

Что такое "$\times$"?

Одно из определений операции умножения *целых неотрицательных чисел* выглядит так:
это двуместная операция $\times$, такая что для любых чисел x и y верно следующее:

- $\mathrm{x} \times 0 = 0$
- $\mathrm{x} \times (\mathrm{y} + 1) = \mathrm{x} \times \mathrm{y} + \mathrm{x}$

Добавим функциональный символ $+^{(2)}$ в сигнатуру σ
и запишем индуктивное определение $\times$ как две формулы:

- $A_{\times\mathbf{0}}\colon \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} \times \mathbf{0} = \mathbf{0})$
- $A_{\times\mathbf{s}}\colon \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{x} \times \mathbf{s}(\mathrm{y}) = \mathrm{x} \times \mathrm{y} + \mathrm{x})$

Очевидно (?), что $\mathcal{I}^{\sigma}_{ar} \models A_{\times\mathbf{0}}$ и $\mathcal{I}^{\sigma}_{ar} \models A_{\times\mathbf{s}}$

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$

Что такое “$+$”?

Одно из определений операции сложения *целых неотрицательных чисел* выглядит так:
это двуместная операция $+$, такая что для любых чисел x и y верно следующее:

- $\mathrm{x} + 0 = \mathrm{x}$
- $\mathrm{x} + (\mathrm{y} + 1) = (\mathrm{x} + \mathrm{y}) + 1$

Запишем индуктивное определение $+$ как две формулы:

- $A_{+\mathbf{0}}$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} + \mathbf{0} = \mathrm{x})$
- $A_{+\mathbf{s}}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{x} + \mathbf{s}(\mathrm{y}) = \mathbf{s}(\mathrm{x} + \mathrm{y}))$

Очевидно (?), что $\mathcal{I}^{\sigma}_{ar} \models A_{+\mathbf{0}}$ и $\mathcal{I}^{\sigma}_{ar} \models A_{+\mathbf{s}}$

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$

Что такое “$=$”?

Это **отношение эквивалентности**:

- $A_{r=}$: $\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} = \mathrm{x})$ (*оно рефлексивно*)
- $A_{s=}$: $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathrm{y} = \mathrm{x}))$ (*оно симметрично*)
- $A_{t=}$: $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, ((\mathrm{x} = \mathrm{y})\,\&(\mathrm{y} = \mathrm{z}) \to (\mathrm{x} = \mathrm{z}))$ (*оно транзитивно*)

При этом в формулах $A_{r=}$, $A_{s=}$, $A_{t=}$, в числе прочего, **не** утверждается, что если $\mathrm{x} = \mathrm{y}$, то $\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y})$: с точки зрения этих формул, “$=$” — это просто *какое-то* отношение эквивалентности *каких-то* предметов

Добавим к списку верных арифметических свойств такое:

- $A_{=+\mathbf{s}}$: $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y})))$

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$
$$\Gamma = \{A_{\times\mathbf{0}}, A_{\times\mathbf{s}}, A_{+\mathbf{0}}, A_{+\mathbf{s}}, A_{r=}, A_{s=}, A_{t=}, A_{=+\mathbf{s}}\}$$
$$\sigma = \left\langle\{\mathbf{0}\}, \left\{\mathbf{s}^{(1)}, +, \times\right\}, \{=\}\right\rangle$$

Покажем, что $\Gamma \models \varphi$

Если это действительно так, то по определению логического следования будет верно следующее: **в любой интерпретации, в которой верны все утверждения из Γ (в том числе и в интерпретации $\mathcal{I}^{\sigma}_{ar}$), обязательно верно и утверждение φ**

Для наглядности в обосновании вместо термов
$$\mathbf{s}(\mathbf{0}),\ \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})),\ \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))),\ \ldots$$
будут записываться соответствующие числа:
$$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \ldots$$

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$
$$\Gamma = \{A_{\times\mathbf{0}}, A_{\times\mathbf{s}}, A_{+\mathbf{0}}, A_{+\mathbf{s}}, A_{r=}, A_{s=}, A_{t=}, A_{=+\mathbf{s}}\}$$
$$\sigma = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{\mathbf{s}^{(1)}, +, \times\right\}, \{=\} \right\rangle$$

В обосновании будут использоваться следующие два *очевидных* (?) утверждения:

Утверждение

Для любой формулы ψ и любых множеств формул Γ, Δ верно следующее: если $\Gamma \models \psi$, то $\Gamma \cup \Delta \models \psi$

Утверждение

Для любых формул ψ, χ и любого множества формул Γ верно следующее: если $\Gamma \models \psi$ и $\Gamma \cup \{\psi\} \models \chi$, то $\Gamma \models \chi$

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$

$$\Gamma = \{A_{\times\mathbf{0}}, A_{\times\mathbf{s}}, A_{+\mathbf{0}}, A_{+\mathbf{s}}, A_{r=}, A_{s=}, A_{t=}, A_{=+\mathbf{s}}\}$$

$$\begin{array}{lcll}
A_{\times\mathbf{0}} & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} & (\varphi_1) \\
A_{+\mathbf{0}} & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{2} \times \mathbf{0} & (\varphi_2) \\
A_{t=}, \varphi_1, \varphi_2 & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} & (\varphi_3) \\
A_{=+\mathbf{s}}, \varphi_3 & \models & \mathbf{s}(\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{0}) = \mathbf{1} & (\varphi_4) \\
A_{+\mathbf{s}} & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{s}(\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{0}) & (\varphi_5) \\
A_{t=}, \varphi_4, \varphi_5 & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1} & (\varphi_6) \\
A_{=+\mathbf{s}}, \varphi_6 & \models & \mathbf{s}(\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{1}) = \mathbf{2} & (\varphi_7) \\
A_{+\mathbf{s}} & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{2} = \mathbf{s}(\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{1}) & (\varphi_8) \\
A_{t=}, \varphi_7, \varphi_8 & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{2} = \mathbf{2} & (\varphi_9) \\
A_{\times\mathbf{s}} & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{2} & (\varphi_{10}) \\
A_{t=}, \varphi_9, \varphi_{10} & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{2} & \\
\dots & & & \\
A_{t=}, \dots & \models & \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4} &
\end{array}$$

Следовательно, $\Gamma \models \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$
$$\Gamma = \{A_{\times\mathbf{0}}, A_{\times\mathbf{s}}, A_{+\mathbf{0}}, A_{+\mathbf{s}}, A_{r=}, A_{s=}, A_{t=}, A_{=+\mathbf{s}}\}$$
$$\sigma = \Big\langle \{\mathbf{0}\}, \big\{\mathbf{s}^{(1)}, +, \times\big\}, \{=\} \Big\rangle$$

Сигнатурой σ задана совокупность понятий, которые допускается использовать в формулировке высказываний: константа $\mathbf{0}$, операции $\mathbf{s}$, $+$ и $\times$, отношение $=$

Множеством Γ задан набор *a priori* верных свойств, определяющих смысл этих понятий: утверждений, не требующих доказательств, то есть **аксиом**

Формула φ — это высказывание, справедливость которого при условии справедливости утверждений из Γ потребовалось *доказать*: **теорема**

Вступление

$$\varphi\colon \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) \times \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0})) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{0}))))$$
$$\Gamma = \{A_{\times\mathbf{0}}, A_{\times\mathbf{s}}, A_{+\mathbf{0}}, A_{+\mathbf{s}}, A_{r=}, A_{s=}, A_{t=}, A_{=+\mathbf{s}}\}$$
$$\sigma = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{\mathbf{s}^{(1)}, +, \times\right\}, \{=\} \right\rangle$$

Если множество аксиом (Γ) подобрано “достаточно хорошо”, то оно без изменений может быть использовано при доказательстве многих других *справедливых* теорем

Набор аксиом, вместе с выбранной сигнатурой позволяющий формулировать и доказывать теоремы, называется **аксиоматической теорией**

Если в качестве аксиом и теорем выбраны формулы логики предикатов (первого порядка), то такой теории присваивается название

аксиоматическая теория первого порядка

Аксиоматические теории

Выберем сигнатуру σ алфавита логики предикатов

Теория[1] $\mathcal{T}$ сигнатуры σ — это множество предложений (*сигнатуры* σ)

Формулы, принадлежащие теории $\mathcal{T}$, называются аксиомами этой теории

Логические следствия теории $\mathcal{T}$ называются теоремами этой теории

Если теория ясна из контекста, то будем *теоремы теории* называть просто *теоремами*

---

[1] Полное название: аксиоматическая теория первого порядка

Аксиоматические теории

Формула φ общезначима в теории $\mathcal{T}$, если $\forall \widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)$ — теорема

Другое название: $\mathcal{T}$-общезначима
Обозначение: $\models_{\mathcal{T}} \varphi$

Формула φ противоречива в теории $\mathcal{T}$, если формула $\neg\varphi$ $\mathcal{T}$-общезначима

Другие названия: невыполнима в теории $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$-противоречива, $\mathcal{T}$-невыполнима
Обозначение: $\not\models\!\models_{\mathcal{T}} \varphi$[1]

Формула φ выполнима в теории $\mathcal{T}$, если она не является $\mathcal{T}$-противоречивой

Другое название: $\mathcal{T}$-выполнима
Обозначение: $|\!\models_{\mathcal{T}} \varphi$[1]

---

[1] Как и раньше, это обозначение необщеизвестно, его придумал я, чтобы сэкономить место на слайдах

Аксиоматические теории

Достаточно исследовать только одно из трёх свойств (общезначимость, выполнимость, невыполнимость в теории):

$$
\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\ \mathcal{T}\text{-общезначима} \arrow[r, bend left, "\psi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[d, bend left, "\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \text{предложение } \psi\ \mathcal{T}\text{-общезначимо} \\
\text{формула } \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\ \mathcal{T}\text{-невыполнима} \arrow[u, bend left, "\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[r, bend left, "\varphi = \exists \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi = \psi"', "\text{противоположный ответ}"] & \text{предложение } \varphi\ \mathcal{T}\text{-невыполнимо} \\
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\ \mathcal{T}\text{-выполнима} \arrow[r, bend left, "\psi = \exists \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \text{предложение } \psi\ \mathcal{T}\text{-выполнимо}
\end{tikzcd}
$$

Аксиоматические теории

Достаточно исследовать только одно из трёх свойств (общезначимость, выполнимость, невыполнимость в теории):

Утверждение

формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ $\mathcal{T}$-общезначима $\xrightarrow{\psi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})}$ предложение ψ $\mathcal{T}$-общезначимо

$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ $\uparrow$ $\downarrow$ $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

формула $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ $\mathcal{T}$-невыполнима $\xrightarrow{\varphi = \exists \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})}$ предложение φ $\mathcal{T}$-невыполнимо

$\varphi = \psi$ $\updownarrow$ противоположный ответ

формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ $\mathcal{T}$-выполнима $\xrightarrow{\psi = \exists \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})}$ предложение ψ $\mathcal{T}$-выполнимо

Доказательство. Самостоятельно (это просто)

Аксиоматические теории

Пример:

$$\sigma = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{\mathbf{s}^{(1)}, +, \times\right\}, \{=\}\right\rangle$$
$$\Gamma = \{A_{\times\mathbf{0}}, A_{\times\mathbf{s}}, A_{+\mathbf{0}}, A_{+\mathbf{s}}, A_{r=}, A_{s=}, A_{t=}, A_{=+\mathbf{s}}\}$$
$$\varphi\colon \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$$

Γ — теория сигнатуры σ

$\models_\Gamma \varphi$, а значит, предложение φ является Γ-общезначимым

$\mathcal{I}^\sigma_{ar} \models \Gamma$, но $\mathcal{I}^\sigma_{ar} \not\models \neg\varphi$, а значит, $\Gamma \not\models \neg\varphi$, и

- предложение $\neg\varphi$ не является Γ-общезначимым
- предложение φ не является Γ-противоречивым
- предложение φ является Γ-выполнимым

$\models_\Gamma \neg\neg\varphi$, а значит, предложение $\neg\varphi$ является Γ-противоречивым

Проблема общезначимости формул в теории

Проблема общезначимости формул в теории $\mathcal{T}$ формулируется так:

для заданной формулы φ проверить, является ли она $\mathcal{T}$-общезначимой:

$$\overset{?}{\models_{\mathcal{T}}} \varphi$$

Основные свойства теорий

Элементарная теория интерпретации $\mathcal{I}$ сигнатуры σ ($\mathsf{Th}(\mathcal{I})$) — это множество всех предложений сигнатуры σ, истинных в $\mathcal{I}$

Для любой интерпретации $\mathcal{I}$ существует элементарная теория (по определению), но этот факт никак не помогает проверять истинность формул в интерпретации $\mathcal{I}$: $\models_{\mathsf{Th}(\mathcal{I})} \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — это синоним записи $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi \in \mathsf{Th}(\mathcal{I})$, а значит, и $\mathcal{I} \models \varphi$

В частности, существует и элементарная теория интерпретации $\mathcal{I}_{ar}^{\sigma}$ ($\sigma = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{\mathbf{s}^{(1)}, +, \times\right\}, \{=\} \right\rangle$)

Основные свойства теорий

Существует элементарная теория интерпретации $\mathcal{I}_{ar}^{\sigma}$ $\left(\sigma = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{\mathbf{s}^{(1)}, +, \times\right\}, \{=\} \right\rangle\right)$

При этом ранее была предложена теория Γ, позволяющая проверять истинность *каких-то* арифметических утверждений

Более того, можно **наугад** выписать несколько предложений в сигнатуре σ, объявить их аксиомами, а все логические следствия аксиом — арифметическими теоремами

Далее будет введено несколько понятий, позволяющих рассуждать о том, чем одни теории "лучше" других:

- **адекватность интерпретациям**
- **непротиворечивость**
- **независимость**
- **разрешимость**
- **полнота**

Основные свойства теорий

Теория $\mathcal{T}$ адекватна классу интерпретаций $\mathfrak{I}$, если любая интерпретация из $\mathfrak{I}$ является моделью всех предложений множества $\mathcal{T}$

Например, теория Γ, предложенная ранее при доказательстве того, что *дважды два — четыре*, адекватна арифметической интерпретации

Другой пример: теория частичных порядков — это теория сигнатуры $\langle\emptyset, \emptyset, \{<\}\rangle$, содержащая две аксиомы:

- аксиома антирефлесивности строгого частичного порядка:
$$\forall \mathrm{x}\ \neg(\mathrm{x} < \mathrm{x})$$
- аксиома транзитивности строгого частичного порядка:
$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x} < \mathrm{y})\,\&(\mathrm{y} < \mathrm{z}) \rightarrow (\mathrm{x} < \mathrm{z}))$$

Теория частичных порядков адекватна множеству всех интерпретаций, оценивающих символ “$<$” как отношение строгого частичного порядка

Основные свойства теорий

Теория $\mathcal{T}$ непротиворечива, если существует интерпретация, являющаяся моделью для всех формул из $\mathcal{T}$, и противоречива в противном случае

Утверждение

Любая формула φ является общезначимой и невыполнимой и не является выполнимой в любой противоречивой теории $\mathcal{T}$

Доказательство.

Множество предложений $\mathcal{T}$ не имеет ни одной модели

Тогда по определению логического следования:

1. $\mathcal{T} \models \varphi$, то есть формула φ $\mathcal{T}$-общезначима
2. $\mathcal{T} \models \neg\varphi$, то есть формула φ $\mathcal{T}$-противоречива и, следовательно, не является $\mathcal{T}$-выполнимой ▼

Таким образом, все противоречивые теории **абсолютно бессмысленны**

Основные свойства теорий

Предложение φ независимо в теории $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T} \not\models \varphi$

Теория $\mathcal{T}$ независима, если если каждая аксиома φ из $\mathcal{T}$ независима в теории $\mathcal{T} \setminus \{\varphi\}$, и зависима в противном случае

Содержательно, **зависимая** теория — это теория, аксиомы которой **избыточны**: можно удалить хотя бы одну из них без изменения множества всех теорем

Пример:

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1 : & \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{y} + \mathrm{x}), \\ \varphi_2 : & \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{2}, \\ \varphi_3 : & \mathbf{3} = \mathbf{2} + \mathbf{1} \end{array} \right\}$$

Теория Γ **зависима**: $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$

Это означает, что теория $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ имеет то же множество теорем, что и Γ, но при этом *чуть лучше* Γ тем, что содержит меньше формул

Основные свойства теорий

Теория $\mathcal{T}$ называется разрешимой, если проблема $\mathcal{T}$-общезначимости формул алгоритмически разрешима

Содержательно, разрешимость теории означает, что существует способ *автоматически* доказать или опровергнуть каждую теорему, которую в принципе можно доказать или опровергнуть

Осталось определить понятие **полноты** теории

Начнём издалека: представим себе, что теория $\mathcal{T}$ разрабатывалась так:

- выбрана **одна** интерпретация $\mathcal{I}$
- в теорию $\mathcal{T}$ включено достаточно аксиом, чтобы утверждать, что ими в точности описывается смысл всех констант, операций и отношений, задаваемых $\mathcal{I}$

Как строго определить фразу "в точности описывается смысл"?

Основные свойства теорий

"аксиомами теории $\mathcal{T}$ в точности описывается смысл понятий, задаваемых интерпретацией $\mathcal{I}$"

Вариант 1: интерпретация $\mathcal{I}$ является единственной моделью множества $\mathcal{T}$

Интерпретации $\mathcal{I} = \left\langle \mathrm{D}_\mathcal{I}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \right\rangle$ и $\mathcal{J} = \left\langle \mathrm{D}_\mathcal{J}, \overline{\overline{\mathsf{Const}}}, \overline{\overline{\mathsf{Func}}}, \overline{\overline{\mathsf{Pred}}} \right\rangle$ изоморфны, если существует взаимно-однозначное отображение $\tau : \mathrm{D}_\mathcal{I} \to \mathrm{D}_\mathcal{J}$, такое что

- $\overline{\overline{\mathbf{c}}} = \tau(\overline{\mathbf{c}})$ $\quad (\mathbf{c} \in \mathsf{Const})$
- $\overline{\overline{\mathbf{f}}}(\tau(d_1), \dots, \tau(d_n)) = \tau(\overline{\mathbf{f}}(d_1, \dots, d_n))$ $\quad (\mathbf{f}^{(n)} \in \mathsf{Func};\ d_1, \dots, d_n \in \mathrm{D}_\mathcal{I})$
- $\overline{\overline{\mathrm{P}}}(\tau(d_1), \dots, \tau(d_n)) = \overline{\mathrm{P}}(d_1, \dots, d_n)$ $\quad (\mathrm{P}^{(n)} \in \mathsf{Pred};\ d_1, \dots, d_n \in \mathrm{D}_\mathcal{I})$

Основные свойства теорий

"аксиомами теории $\mathcal{T}$ в точности описывается смысл понятий, задаваемых интерпретацией $\mathcal{I}$"

Вариант 1: интерпретация $\mathcal{I}$ является единственной моделью множества $\mathcal{T}$

Утверждение. Если $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$ и интерпретация $\mathcal{J}$ изоморфна интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{J} \models \mathcal{T}$

Доказательство.Очевидно? ($\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ отличаются только тем, как именно названы предметы)

Следствие. Любая непротиворечивая теория имеет бесконечно много моделей

Значит, вариант 1 несостоятелен

Основные свойства теорий

“аксиомами теории $\mathcal{T}$ в точности описывается смысл понятий, задаваемых интерпретацией $\mathcal{I}$”

Вариант 2: все модели теории $\mathcal{T}$ изоморфны

Мощность предметной области любой интерпретации можно увеличить так:[1]

- произвольно выберем предмет d
- добавим в предметную область новые предметы: столько, чтобы мощность множества этих предметов была больше мощности исходной предметной области
- доопределим все оценки интерпретации так, чтобы добавленные предметы были неотличимы от d

---

[1] Здесь записано доказательство утверждения о несостоятельности варианта 2, но строгая формулировка, и тем более доказательство, не приводятся. Чтобы записать всё строго, требуется углубиться в теорию множеств — делать это сейчас нет ни времени, ни желания.

Основные свойства теорий

“аксиомами теории $\mathcal{T}$ в точности описывается смысл понятий, задаваемых интерпретацией $\mathcal{I}$”

Вариант 2: **все модели теории $\mathcal{T}$ изоморфны**

Расширенная интерпретация **неизоморфна** исходной, так как не существует биекции между множествами различной мощности

При этом расширенная интерпретация отличается от исходной только тем, что одному исходному предмету d присвоено несколько названий

Значит, вариант 2 тоже несостоятелен

Основные свойства теорий

"аксиомами теории $\mathcal{T}$ в точности описывается смысл понятий, задаваемых интерпретацией $\mathcal{I}$"

Интерпретации $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ элементарно эквивалентны, если

$$\mathsf{Th}(\mathcal{I}) = \mathsf{Th}(\mathcal{J})$$

Вариант 3 (подходящий): **все модели теории $\mathcal{T}$ элементарно эквивалентны**

Утверждение

Любые изоморфные интерпретации элементарно эквивалентны

Доказательство. Очевидно?

Утверждение

Существуют неизоморфные элементарно эквивалентные интерпретации

Доказательство. Попробуйте самостоятельно

Основные свойства теорий

Теория $\mathcal{T}$ называется полной, если для любого предложения φ верно хотя бы одно из соотношений: $\models_{\mathcal{T}} \varphi$, $\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$

Утверждение

Теория $\mathcal{T}$ полна тогда и только тогда, когда все её модели элементарно эквивалентны

Доказательство.

($\Rightarrow$): Рассмотрим предложение φ

Если $\models_{\mathcal{T}} \varphi$, то для любой модели $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ верно: $\mathcal{I} \models \varphi$

Иначе $\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$, и для любой модели $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ верно: $\mathcal{I} \models \neg\varphi$

($\Leftarrow$): Рассмотрим модель $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ и предложение φ

Если $\mathcal{I} \models \varphi$, то для любой модели $\mathcal{J}$ теории $\mathcal{T}$ верно $\mathcal{J} \models \varphi$, а значит, $\models_{\mathcal{T}} \varphi$

Иначе $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, а значит, для любой модели $\mathcal{J}$ теории $\mathcal{T}$ верно $\mathcal{J} \models \neg\varphi$, и тогда $\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$ ▼

Основные свойства теорий

Пример: теория частичных порядков

$$\mathcal{T}_< = \left\{ \begin{array}{c} \forall x\, \neg(x < x) \\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x < y)\,\&(y < z) \to (x < z)) \end{array} \right\}$$

неполна:

- $\not\models_{\mathcal{T}_<} \exists x\, \exists y\, (x < y)$
  - так как существует частичный порядок, содержащий только несравнимые элементы
- $\not\models_{\mathcal{T}_<} \neg\exists x\, \exists y\, (x < y)$
  - так как существует частичный порядок, содержащий пару сравнимых элементов

Формальная арифметика

Остановимся подробнее на том, как может выглядеть теория, предназначенная для доказательства **арифметических** теорем

Для начала остановимся на такой сигнатуре (сигнатуре формальной арифметики):

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{ \mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}, \times^{(2)} \right\}, \{=\} \right\rangle$$

Формальная арифметика — это любая теория, адекватная арифметической интерпретации $\mathcal{I}_{ar} = \mathcal{I}_{ar}^{\sigma_{ar}}$

Числами будем называть предметы модели формальной арифметики

Формальная арифметика

Пример: множество Γ, предложенное в начале лекции для доказательства того, что *дважды два — четыре*, является формальной арифметикой:

$$\left\{\begin{array}{ll} A_{\times\mathbf{0}}: & \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}) \\ A_{\times\mathbf{s}}: & \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x}\times\mathbf{s}(\mathrm{y})=\mathrm{x}\times\mathrm{y}+\mathrm{x}) \\ A_{+\mathbf{0}}: & \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x}+\mathbf{0}=\mathrm{x}) \\ A_{+\mathbf{s}}: & \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x}+\mathbf{s}(\mathrm{y})=\mathbf{s}(\mathrm{x}+\mathrm{y})) \\ A_{r=}: & \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x}=\mathrm{x}) \\ A_{s=}: & \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,((\mathrm{x}=\mathrm{y})\to(\mathrm{y}=\mathrm{x})) \\ A_{t=}: & \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,\forall \mathrm{z}\,((\mathrm{x}=\mathrm{y})\,\&(\mathrm{y}=\mathrm{z})\to(\mathrm{x}=\mathrm{z})) \\ A_{=+\mathbf{s}}: & \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,((\mathrm{x}=\mathrm{y})\to(\mathbf{s}(\mathrm{x})=\mathbf{s}(\mathrm{y}))) \end{array}\right\}$$

Но это *не очень хорошая* арифметика

Например, в такой арифметике нельзя ни доказать, ни опровергнуть, что *дважды два — три*: среди моделей Γ есть такая, в которой все числа равны

Формальная арифметика

Другой пример: арифметика Пеано — это множество аксиом

$$\left\{\begin{array}{ll}
A_{\times\mathbf{0}}: & \forall x\,(x \times \mathbf{0} = \mathbf{0}) \\
A_{\times\mathbf{s}}: & \forall x\,\forall y\,(x \times \mathbf{s}(y) = x \times y + x) \\
A_{+\mathbf{0}}: & \forall x\,(x + \mathbf{0} = x) \\
A_{+\mathbf{s}}: & \forall x\,\forall y\,(x + \mathbf{s}(y) = \mathbf{s}(x + y)) \\
A_{r=}: & \forall x\,(x = x) \\
A_{s=}: & \forall x\,\forall y\,((x = y) \to (y = x)) \\
A_{t=}: & \forall x\,\forall y\,\forall z\,((x = y)\,\&(y = z) \to (x = z)) \\
A_{=+\mathbf{s}}: & \forall x\,\forall y\,((x = y) \to (\mathbf{s}(x) = \mathbf{s}(y))) \\
A_{=-\mathbf{s}}: & \forall x\,\forall y\,((\mathbf{s}(x) = \mathbf{s}(y)) \to (x = y)) \\
A_0: & \forall x\,\neg(\mathbf{0} = x) \\
A_{ind}: & \varphi\,\{x/\mathbf{0}\}\,\&\,\forall x\,(\varphi \to \varphi\,\{x/\mathbf{s}(x)\}) \to \forall x\,\varphi
\end{array}\right\}$$

A_{ind} — это схема аксиом индукции: бесконечное множество аксиом, по одной для каждой формулы $\varphi(x)$

А насколько *хороша* арифметика Пеано, и можно ли придумать арифметику *ещё лучше*?

Теорема Гёделя о неполноте

Любая рекурсивно перечислимая[1] формальная арифметика неполна

Набросок доказательства

Докажем более простое утверждение:

любая *конечная* теория с моделью $\mathcal{I}_{ar}$ неполна

От противного предположим, что существует конечная полная теория $\mathcal{T}$, такая что $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}$

Докажем, что в любой такой теории $\mathcal{T}$ необходимо присутствует парадокс лжеца:

существует предложение,
утверждающее, что это предложение ложно

[1] Существует алгоритм, перечисляющий аксиомы одну за одной; останавливаться алгоритм не обязан

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Предметы интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ — целые неотрицательные числа, поэтому начнём доказательство с сопоставления каждой формуле такого числа[1]

Сопоставим натуральное число каждому символу алфавита сигнатуры σ_{ar}:

- $g(\mathbf{0}) = 1, \quad g(+) = 2, \quad g(\times) = 3, \quad g(=) = 4$
- $g(() = 5, \quad g(,) = 6, \quad g()) = 7$
- $g(\&) = 8, \quad g(\vee) = 9, \quad g(\to) = 10, \quad g(\neg) = 11,$ $g(\forall) = 12, \quad g(\exists) = 13$
- $g(\mathtt{x}_1) = 14, \quad g(\mathtt{x}_2) = 15, \quad g(x_3) = 16, \quad \ldots$

---

[1] То есть с описания нумерации Гёделя

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Сопоставим формуле φ натуральное число (код формулы)

$$g(\varphi) = p_1^{g(\varphi[1])} \times p_2^{g(\varphi[2])} \times \cdots \times p_{|\varphi|}^{g(\varphi[|\varphi|])}$$

Здесь

- p_i — i-е простое число
- $\varphi[i]$ — i-й символ в записи формулы φ
- $|\varphi|$ — размер записи формулы φ

Утверждение

Существует алгоритм, проверяющий, является ли число i, $i \in \mathbb{N}_0$, кодом формулы

(*здесь и дальше "алгоритм" — это* ***машина Тьюринга***,
с алфавитом ленты $\{0, 1, \Lambda\}$,
работающая с двоичными кодами чисел)

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Используя тот же приём со степенями простых чисел, можно определить код

- конечной последовательности формул
- конечной семантической таблицы
- конечного табличного вывода

В теореме полноты табличного вывода был описан алгоритм построения успешного вывода $Tab(\varphi)$ для таблицы $\langle\ \mathcal{T} \mid \varphi\ \rangle$, где φ — произвольная $\mathcal{T}$-общезначимая формула

Утверждение

Существует алгоритм, останавливающийся тогда и только тогда, когда на вход подан код какой-либо общезначимой формулы φ, и выдающий в ответ код вывода $Tab(\varphi)$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Существование парадокса лжеца в формальной арифметике основывается на том, что арифметическими формулами можно описать *всё, что можно вычислить*

Вычислимая функция — это частично определённое отображение $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такое что существует реализующий его алгоритм

(*предполагаю, что понятие вычислимой функции вам знакомо, поэтому подробнее на нём не останавливаюсь*)

График функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ — это множество всех пар чисел (i, j), таких что значение $f(i)$ определно и равно j

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ арифметизуемо, если существует формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ в сигнатуре формальной арифметики, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}] \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{d^n}) \in R$$

Утверждение

График любой вычислимой функции арифметизуем

(это утверждение нетривиально, но доказываться не будет)

Как следствие, арифметизуемым будет график такой функции:

$$f_t(i) = \begin{cases} g(Tab(g^{-1}(i))), & \text{если } i \text{ — код} \\ & \qquad \mathcal{T}\text{-общезначимой формулы} \\ \text{не определено}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Это означает, что существует формула $\mathit{Proof}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \mathit{Proof}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[d_1, d_2]$$

$$\Leftrightarrow$$

d_2 — код табличного вывода $\mathit{Tab}(\varphi)$,
где φ — формула, кодом которой является число d_1

Рассмотрим такую формулу $\mathit{Val}(\mathrm{x})$:

$$\exists \mathrm{y}\ \mathit{Proof}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Что означает формула Val?

$\mathcal{I}_{ar} \models \mathit{Val}[d] \quad \Leftrightarrow \quad d$ — код формулы, истинной в $\mathcal{I}_{ar}$

Мы выразили свойство истинности формул арифметики на языке самой арифметики, и теперь наконец-таки можем попытаться формализовать парадокс лжеца

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Лемма о диагонали

Для любой арифметической формулы $\varphi(\mathtt{x})$ существует арифметическое предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \varphi(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

(это второе нетривиальное утверждение, которое приведено без доказательства)

Применим лемму о диагонали к формуле $\varphi = \neg Val$:

Существует предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \neg Val(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

Предложение ψ — формализация **парадокса лжеца**:

Предложение ψ истинно в $\mathcal{I}_{ar}$ $\Leftrightarrow$ оно ложно в $\mathcal{I}_{ar}$

▼

Теорема Гёделя о неполноте

Итог: если взять любой набор арифметических свойств, с которым *хоть как-нибудь* можно работать (бесконечно перечислять), то обязательно найдётся арифметическая теорема, которую нельзя ни доказать, ни опровергнуть

Следствия

- Никакая конечная формальная арифметика не полна
- Арифметика Пеано неполна
- *Если Вы начнёте перечислять какие угодно конкретные арифметические свойства и включать их в список аксиом, то не получите полную арифметику*
- Элементарная теория интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ не является рекурсивно перечислимой
- Полная формальная арифметика неразрешима

Теорема Гёделя о неполноте

Негативный результат теоремы Гёделя может показаться странным в свете того, что выбран довольно узкий фрагмент арифметики: в арифметике в целом содержится намного больше операций и отношений, чем $+$, $\times$, $\mathbf{s}$ и $=$

Следует иметь в виду, что кажущаяся узость этого фрагмента обманчива

Определимость

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathsf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Некоторые арифметические понятия можно **явно** определить, используя только понятия сигнатуры σ_{ar}

Содержательные примеры:

- $\mathbf{1} = \mathsf{S}(\mathbf{0})$
- $\mathbf{n} = \underbrace{\mathsf{S}(\mathsf{S}(\ldots\mathsf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots)) \qquad (\mathbf{n} \in \mathbb{N})$
- $\mathrm{x}^{\mathbf{2}} = \mathrm{x} \times \mathrm{x}$
- $\mathrm{x} \geq \mathrm{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathrm{z}\, (\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z})$

Рассмотрим сигнатуру σ и содержащийся в ней символ s:
константу, функциональный символ или предикатный символ

$\sigma_{-\mathrm{s}}$ — это сигнатура, получаемая из σ удалением символа s
$\sigma'_{+\mathrm{s}} = \sigma$, если $\sigma' = \sigma_{-\mathrm{s}}$

Определимость

Определение константы[1] $\mathbf{c}$ (*в сигнатуре* $\sigma_{-\mathbf{c}}$) —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{c}})$ (*сигнатуры* $\sigma_{-\mathbf{c}}$)

Определение функционального символа[1] $\mathbf{f}^{(n)}$ —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Определение предикатного символа[1] $\mathrm{P}^{(n)}$ —

это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Примеры определений в сигнатуре σ_{ar} для

- константы $\mathbf{1}$:

$$\mathrm{x}_{\mathbf{1}} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$

- функционального символа $\cdot^{\mathbf{2}(1)}$:

$$\mathrm{x}_{\cdot\mathbf{2}} = \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_1$$

- предикатного символа $\geq^{(2)}$:

$$\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + \mathrm{y})$$

---

[1] Более точное название такого определения — явное определение:
"А — это Б (*не зависящее от А*)"

Определимость

Определение предмета c в интерпретации $\mathcal{I}$ (сигнатуры σ) — это определение $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{c}})$ константы $\mathbf{c}$ (в сигнатуре σ), такое что $\mathcal{I} \models \varphi[d] \quad \Leftrightarrow d = c$

Определение операции f местности n в интерпретации $\mathcal{I}$ — это определение $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ функционального символа $\mathbf{f}^{(n)}$, такое что $\mathcal{I} \models \varphi[d, \widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow f(\widetilde{d}^n) = d$

Определение отношения P местности n в интерпретации $\mathcal{I}$ — это определение $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ предикатного символа $\mathrm{P}^{(n)}$, такое что $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow (\widetilde{d}^n) \in P$

Определимость

Предмет c определим в интерпретации $\mathcal{I}$, если существует определение этого предмета в $\mathcal{I}$

Операция f определима в интерпретации $\mathcal{I}$, если существует определение этой операции в $\mathcal{I}$

Отношение P определимо в интерпретации $\mathcal{I}$, если существует определение этого отношения в $\mathcal{I}$

Примеры: в интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ определимы

- число 1:
$$\mathtt{x_1} = \mathbf{S(0)}$$
- операция возведения в квадрат $\cdot^{2(1)}$:
$$\mathtt{x_{.2}} = \mathtt{x_1} \times \mathtt{x_1}$$
- отношение нестрогого неравенства чисел $\geq^{(2)}$:
$$\exists \mathtt{y}\ (\mathtt{x_1} = \mathtt{x_2} + \mathtt{y})$$

Определимость

Если $\varphi(\mathrm{x_c})$ — определение константы $\mathbf{c}$, то $\varphi\,\{\mathrm{x_c}/\mathbf{c}\}$ —

аксиома $A[\mathbf{c},\varphi]$, определяющая константу $\mathbf{c}$

Если $\varphi(\mathrm{x_f},\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — определение функционального символа $\mathbf{f}$, то

$\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\varphi\,\{\mathrm{x_f}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\})$ —

аксиома $A[\mathbf{f},\varphi]$, определяющая функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$

Если $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — определение предикатного символа P, то

$\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\mathrm{P}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\leftrightarrow\varphi)$ —

аксиома $A[\mathrm{P},\varphi]$, определяющая предикатный символ $\mathrm{P}^{(n)}$

Примеры аксиом, определяющих (*в сигнатуре* σ_{ar})

- константу $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1}=\mathbf{S}(\mathbf{0})$$

- функциональный символ $\cdot^{\mathbf{2}}$:

$$\forall\mathrm{x_1}\ (\mathrm{x_1}^2=\mathrm{x_1}\times\mathrm{x_1})$$

- предикатный символ $\geq$:

$$\forall\mathrm{x_1}\,\forall\mathrm{x_2}\ (\mathrm{x_1}\geq\mathrm{x_2}\leftrightarrow\exists\mathrm{y}\ (\mathrm{x_1}=\mathrm{x_2}+\mathrm{y}))$$

Определимость

Если $\varphi(\mathrm{x_c})$ — определение предмета c в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\varphi\left\{\mathrm{x_c}/\mathbf{c}\right\}$ —

аксиома $A[c, \varphi]$, определяющая предмет c в $\mathcal{I}$

Если $\varphi(\mathrm{x_f}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — определение операции f в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\varphi\left\{\mathrm{x_f}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\right\})$ —

аксиома $A[f, \varphi]$, определяющая операцию f в $\mathcal{I}$

Если $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — определение отношения P, то $\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\mathrm{P}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \leftrightarrow \varphi)$ —

аксиома $A[P, \varphi]$, определяющая отношение P в $\mathcal{I}$

Примеры аксиом, определяющих (*в интерпретации* $\mathcal{I}_{ar}$)

- число $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$

- операцию возведения в квадрат $\cdot^2$:

$$\forall \mathrm{x_1}\ (\mathrm{x_1}^2 = \mathrm{x_1} \times \mathrm{x_1})$$

- отношение нестрогого неравенства чисел $\geq$:

$$\forall \mathrm{x_1}\ \forall \mathrm{x_2}\ (\mathrm{x_1} \geq \mathrm{x_2} \leftrightarrow \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x_1} = \mathrm{x_2} + \mathrm{y}))$$

Определимость

Расширение теории $\mathcal{T}$ сигнатуры σ символом $\mathbf{s}$ согласно определению φ — это теория $\mathcal{T}[\mathbf{s},\varphi] = \mathcal{T} \cup \{A[\mathbf{s},\varphi]\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathbf{s}}$

$\mathcal{I}^{+s}$, где s — предмет (операция над предметами) [отношение между предметами] интерпретации $\mathcal{I}$, — это интерпретация, получающаяся из $\mathcal{I}$ добавлением нового символа $\mathbf{s}$ в сигнатуру и добавлением оценки s символа $\mathbf{s}$

$\mathcal{I}^{-\mathbf{s}}$ — это интерпретация, получаемая из $\mathcal{I}$ удалением символа $\mathbf{s}$ и соответствующей оценки

Определимость

Теорема о расширении теории

Пусть $\mathcal{T}$ — теория сигнатуры σ, и φ — определение символа s в сигнатуре σ. Тогда:

1. **Если $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}$ и φ — определение предмета, операции или отношения s в $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I}^{+s}$ — модель теории $\mathcal{T}[\mathbf{s}, \varphi]$**
2. **Если $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}[\mathbf{s}, \varphi]$, то $\mathcal{I}^{-\mathbf{s}}$ — модель теории $\mathcal{T}$**

Доказательство. Подробно рассмотрим только пункт *1* и следующий случай: **s** — функциональный символ

$$\mathcal{I}^{+s} \models A[\mathbf{s}, \varphi][\widetilde{d}^n] \Leftrightarrow \mathcal{I}^{+s} \models \varphi(\mathtt{x}_{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\left\{\mathtt{x}_{\mathbf{s}}/\mathbf{s}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\right\}[\widetilde{d}^n] \Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I} \models \varphi(\mathtt{x}_{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[d, \widetilde{d}^n] \Leftrightarrow s(\widetilde{d}^n) = d$$

▼

Определимость

Формулы φ и ψ эквивалентны в теории $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$-эквивалентны), если $\models_{\mathcal{T}} \varphi \leftrightarrow \psi$

Утверждение

Любая формула, $\mathcal{T}$-эквивалентная теореме теории $\mathcal{T}$, является теоремой теории $\mathcal{T}$

Доказательство.

Пусть φ — теорема, и формула ψ $\mathcal{T}$-эквивалентна формуле φ

Тогда $\mathcal{T} \models \varphi$ и $\mathcal{T} \models \varphi \to \psi$, а значит, $\mathcal{T} \models \psi$ ▼

Определимость

Теорема о подстановке определения

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, $\mathbf{s}$ — символ и φ — определение этого символа. Для любой формулы ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathbf{s}}$ существует $\mathcal{T}[\mathbf{s}, \varphi]$-эквивалентная формула сигнатуры σ

Доказательство.

Случай 1: $\mathbf{s}$ — предикатный символ

Заменим каждую подформулу $\mathbf{s}(t_1, \ldots, t_k)$ формулы ψ на формулу $\varphi\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{k}/t_k\}$

При определении значения исходных и изменённых подформул формулы ψ всегда будут выдаваться одинаковые результаты

Определимость

Теорема о подстановке определения

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, s — символ и φ — определение этого символа. Для любой формулы ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathbf{s}}$ существует $\mathcal{T}[\mathbf{s}, \varphi]$-эквивалентная формула сигнатуры σ

Доказательство.

Случай 2: **s** — функциональный символ

Раз за разом, пока это возможно, будем делать следующее

Выберем произвольное вхождение символа **s** в формулу ψ (для определённости — в атом A)

Заменим терм $\mathbf{s}(t_1, \ldots, t_k)$ с выбранным вхождением на "свежую" переменную y, и получившийся атом B — на формулу $\exists \mathrm{y}\ (\varphi\{\mathrm{x}_{\mathbf{s}}/\mathrm{y}, \mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{k}/t_k\} \,\&\, \mathrm{B})$

При определении значения исходного атома A и изменённой подформулы формулы ψ всегда будут выдаваться одинаковые результаты

Определимость

Теорема о подстановке определения

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, s — символ и φ — определение этого символа. Для любой формулы ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathsf{s}}$ существует $\mathcal{T}[\mathsf{s},\varphi]$-эквивалентная формула сигнатуры σ

Доказательство.

Случай 3: s — константа — аналогичен случаю 2

$\blacktriangledown$

Определимость

- Теорема о расширении теории говорит, что если **явно** и *корректно* определить предмет, операцию или отношение и добавить к списку рассматриваемых понятий, то ничего неожиданного не возникнет: допустимые модели уточнятся предсказуемым образом согласно определению
- Теорема о подстановке определения говорит, что **явно** определённое понятие всегда можно заменить на его определение, никак не изменив смысла утверждения

Итог. любая теория неявно содержит все определимые понятия (предметы, операции, отношения): их можно использовать при формулировании и доказательстве теорем

Определимость

Например, в арифметической интерпретации определимы (*то есть она неявно содержит*):

- любое натуральное число $\mathbf{n}$:
$$x_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$
- операция вычисления наибольшего общего делителя:
$$\exists y\ (x_{gcd} \times y = x_1)\,\&\,\exists y\ (x_{gcd} \times y = x_2)\,\&\,\forall z\ (\exists y\ (z \times y = x_1)\,\&\,\exists y\ (z \times y = x_2) \to \exists y\ (x_{gcd} = z + y))$$
- свойство чётности чисел ($\mathrm{Even}^{(1)}$):
$$\exists y\ (x_1 = y \times \mathbf{2})$$
- свойство простоты чисел ($\mathrm{Prime}^{(1)}$):
$$\forall y\ \forall z\ (x_1 = y \times z \to y = \mathbf{1} \vee z = \mathbf{1})$$
- свойство согласованности с гипотезой Гольдбаха:
$$\mathrm{Even}(x)\,\&\,x \geq \mathbf{4} \to \exists y\ \exists z\ (\mathrm{Prime}(y)\,\&\,\mathrm{Prime}(z)\,\&\,x = y + z)$$

Арифметика Пресбургера

Попробуем найти фрагмент арифметики менее выразительный и более простой для анализа, чем рассмотренный

Исключим из σ_{ar} умножение:

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{+^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\right\}, \left\{=^{(2)}\right\} \right\rangle$$

$\mathcal{I}_{pa} = \mathcal{I}_{ar}^{\sigma_{pa}}$

Каковы выразительные возможности такого фрагмента арифметики?

Можно ли предоставить “хорошую” систему аксиом, адекватную интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$?

Так как ответы на эти вопросы давно известны, начнём непосредственно с системы аксиом

Арифметика Пресбургера

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметика Пресбургера — это теория $\mathcal{T}_{pa}$ сигнатуры σ_{pa}, состоящая из следующих аксиом:

- $A_{+\mathbf{0}}$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} + \mathbf{0} = \mathrm{x})$
- $A_{+\mathbf{s}}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{x} + \mathbf{s}(\mathrm{y}) = \mathbf{s}(\mathrm{x} + \mathrm{y}))$
- $A_{r=}$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x})$
- $A_{s=}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathrm{y} = \mathrm{x}))$
- $A_{t=}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y})\,\&(\mathrm{y} = \mathrm{z}) \to (\mathrm{x} = \mathrm{z}))$
- $A_{=+\mathbf{s}}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y})))$
- $A_{=-\mathbf{s}}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y})) \to (\mathrm{x} = \mathrm{y}))$
- A_{0}: $\forall \mathrm{x}\ \neg(\mathbf{0} = \mathrm{x})$
- схема A_{ind}: $\varphi\,\{\mathrm{x}/\mathbf{0}\}\,\&\,\forall \mathrm{x}\ (\varphi \to \varphi\,\{\mathrm{x}/\mathbf{s}(\mathrm{x})\}) \to \forall \mathrm{x}\ \varphi$

Утверждение. $\mathcal{I}_{pa} \models \mathcal{T}_{pa}$

Доказательство. Очевидно?

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Теория $\mathcal{T}_{pa}$ разрешима

Доказательство.

Заметим, что в арифметике со сложением определимы:

- число α: $\underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\alpha \text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$
- умножение на число β: $\mathtt{x}_\beta = \underbrace{\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_1 + \cdots + \mathtt{x}_1}_{\beta \text{ раз}}$
- отношение $\mathtt{x}_1 > \mathtt{x}_2$: $\exists \mathtt{x}\ (\alpha = \beta + \mathtt{x}\ \&\ \neg(\mathtt{x} = \mathbf{0}))$
- отношение $\mathtt{x}_1 \equiv_\alpha \mathtt{x}_2$: $\exists \mathtt{x}\ (\mathtt{x}_1 + \alpha\mathtt{x} = \mathtt{x}_2) \vee \exists \mathtt{x}\ (\mathtt{x}_2 + \alpha\mathtt{x} = \mathtt{x}_1)$
- дополнения отношений $>$, $\equiv_\alpha$, $=$

Согласно теореме о подстановке определения, остаточно показать, что теория $\mathcal{T}_{pa}$, расширенная этими символами и определениями, разрешима

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Рефлексивность равенства: $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Симметричность равенства и аксиома $\forall \mathrm{x}\ \mathbf{S}(\mathrm{x}) \neq \mathbf{0}$: $(\alpha \in \mathbb{N}_0)$

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{S}(\alpha) \neq \mathbf{0} \text{ и } \models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} \neq \mathbf{S}(\alpha)$$

Аксиомы равенства и $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{S}(\mathrm{y}) \to \mathrm{x} = \mathrm{y})$: $(\beta \in \mathbb{N}_0)$

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{S}(\alpha) = \mathbf{S}(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta$$

Непротиворечивость теории:

$$\not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} \neq \mathbf{0},\ \not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{S}(\alpha) = \mathbf{0} \text{ и } \not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{S}(\alpha)$$

Значит, $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha = \beta$

Аналогично (*хотя и технически сложнее*) можно показать, что

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha > \beta$$
$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha \equiv_{\gamma} \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha \equiv_{\gamma} \beta$$

Бескванторная формула — это формула, не содержащая кванторов

Итог: для любого бескванторного предложения φ верно

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \varphi$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Покажем, как проверить $\mathcal{T}_{pa}$-общезначимость **произвольной** формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$

Шаг 1: перейти к предложению ψ: $\forall \widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}\ \varphi$

$$(\textit{очевидно}, \models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi)$$

Шаг 2: преобразовать ψ в **бескванторное** предложение χ, такое что $\quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \chi$

Шаг 3: общезначимость предложения χ проверяется легко: это булева формула над высказываниями о равенстве, равенстве по модулю и неравенстве целых неотрицательных чисел

Осталось показать, как преобразуется формула на шаге 2

На некоторое время забудем о теории $\mathcal{T}_{pa}$:

$$\cancel{\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi \Leftrightarrow \models_{\mathcal{T}_{pa}} \chi}$$

$$\mathcal{I}_{pa} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}_{pa} \models \chi$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Каждый шаг преобразования состоит из нескольких этапов:

- заменим все кванторы $\forall$ на $\exists$: $\forall \mathrm{x}\ \varphi \approx \neg\exists \mathrm{x}\ \neg\varphi$
- рассмотрим подформулу $\exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$,
  где φ — бескванторная формула
- преобразуем φ в ДНФ, используя законы булевой алгебры
- вынесем за квантор $\exists \mathrm{x}$ слагаемые, не содержащие x:
  $$\exists \mathrm{x}\ (\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \psi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})) \approx \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \exists \mathrm{x}\ \psi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$
- перенесём квантор $\exists \mathrm{x}$ под каждое слагаемое:
  $$\exists \mathrm{x}\ (K_1 \vee \dots \vee K_n) \approx \exists \mathrm{x}\ K_1 \vee \dots \vee \exists \mathrm{x}\ K_n$$
- каждую формулу $\exists \mathrm{x}\ K_i$ преобразуем в бескванторную с сохранением её значения в $\mathcal{I}_{pa}$

Формула $K_i(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ трактуется в $\mathcal{I}_{pa}$ как

система (не)равенств над $\mathbb{N}_0$

Покажем, как исключить x из произвольной системы с сохранением проекции множества решений на $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Каждое (не)равенство системы можно привести к одной из следующих форм: (t_1, t_2 *не зависят от* $\mathtt{x}$)

$$\alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 < t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \le t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\beta t_2$$
$$\alpha\mathtt{x} + t_1 \ne t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 > t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \ge t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \not\equiv_\beta t_2$$

$$A \not\equiv_\beta B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A \equiv_\beta B + 1 \\ A \equiv_\beta B + 2 \\ \dots \\ A \equiv_\beta B + (\beta - 1) \end{array}\right. \qquad\qquad A \ge B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A > B \end{array}\right.$$

$$A \ne B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < B \end{array}\right. \qquad\qquad A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A < B \end{array}\right.$$

Значит, достаточно рассмотреть системы только над такими (не)равенствами:

$$\alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 < t_2$$
$$\alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\beta t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 > t_2$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Если система содержит хотя бы одно равенство $=$, то исключить $\mathtt{x}$ можно так:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ S(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \end{cases} \Leftrightarrow_{(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})} \begin{cases} t_1 \equiv_\alpha t_2 \\ t_2 \geq t_1 \\ S(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \gtrless t_4 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \gtrless \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha\beta\mathtt{x} + \alpha t_3 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \ldots \end{cases}$$

Пусть теперь система не содержит равенств $=$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Во всех строгих неравенствах системы можно получить одинаковые левые части:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \mathtt{x} + t_1 \gtrless_1 t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \gtrless_2 t_4 \\ \dots \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\beta \mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless_1 \beta t_2 + \alpha t_3 \\ \alpha\beta \mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless_2 \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{array}\right.$$

Если система содержит много строгих неравенств (*в одну сторону*) с одинаковыми левыми частями, то можно исключить $\mathtt{x}$ из всех неравенств, кроме одного:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \mathtt{x} + t \gtrless t_1 \\ \alpha \mathtt{x} + t \gtrless t_2 \\ \dots \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \alpha \mathtt{x} + t \gtrless t_1 \\ t_1 \overset{>}{<} t_2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \alpha \mathtt{x} + t \gtrless t_2 \\ t_2 \gtrless t_1 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \dots \end{array}\right.$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Равенства по модулю разных чисел можно привести к равенствам по модулю одного числа:

$$\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \equiv_\delta t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\delta \mathtt{x} + \delta t_1 \equiv_{\gamma\delta} \delta t_2 \\ \beta\gamma \mathtt{x} + \gamma t_3 \equiv_{\gamma\delta} \gamma t_4 \\ \dots \end{cases}$$

Итог: осталось показать, как исключить $\mathtt{x}$ из системы, содержащей

- не более одного неравенства $\alpha \mathtt{x} + t > t_1$,
- не более одного неравенства $\alpha \mathtt{x} + t < t_2$ с той же левой частью и
- произвольное число равенств $\beta_i \mathtt{x} + t_3^i \equiv_\gamma t_4^i$ по одинаковому модулю γ

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Как исключить $\mathtt{x}$ из неравенства $>$:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t > t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t < t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \ldots \end{cases}$$

Если $t > t_1$, то неравенство выполнено

Для **каждого** решения системы, такого что $t \leq t_1$, найдётся решение, отличающееся только значением $\mathtt{x}$:

$$\alpha\mathtt{x} + t \in \{t_1 + 1, \ldots, t_1 + \alpha\gamma\}$$

Значит, неравенство $\alpha\mathtt{x} + t > t_1$ можно заменить на совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t > t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + 1 \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + 2 \\ \ldots \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + \alpha\gamma \end{array}\right.$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Как исключить $\mathtt{x}$ из $<$ и $\equiv_\gamma$, когда он исключён из $>$:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
[\alpha\mathtt{x} + t < t_2] \\
\beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\
\dots
\end{array}
\right.
\Leftrightarrow
\left[
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{l}
[t < t_2] \\
t_3 \equiv_\gamma t_4 \\
\dots
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{l}
[\alpha + t < t_2] \\
\beta + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\
\dots
\end{array}
\right. \\
\dots \\
\left\{
\begin{array}{l}
[\alpha(\gamma - 1) + t < t_2] \\
\beta(\gamma - 1) + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\
\dots
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

И причём здесь теория $\mathcal{T}_{pa}$?

На каждом **элементарном шаге** преобразования формулы, записанного в виде *синтаксического* преобразования системы, получалась формула, $\mathcal{T}_{pa}$-эквивалентная исходной

Примеры таких элементарных шагов:

- перестановка слагаемых
- вынесение переменной $\mathtt{x}$ в каждой части
- добавление [вычитание] равных чисел к частям [из частей] (не)равенства
- умножение (не)равенства на число (для (не)равенства по модулю — с домножением основания на то же число)
- ...

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Вопрос на понимание:

А где в доказательстве применяется схема математической индукции?

▼

Арифметика Пресбургера

Теорема полноты арифметики Пресбургера
Арифметика Пресбургера полна

Теорема о выразительности арифметики Пресбургера
Отношение R определимо в интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ тогда и только тогда, когда R является множеством решений какой-либо совокупности систем линейных (не)равенств $=$, $\neq$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\equiv_\alpha$, $\not\equiv_\alpha$ над неотрицательными целыми числами

Арифметика Пресбургера

Доказательство теорем полноты и выразительности.

Внимательно изучив доказательство теоремы разрешимости, можно убедиться, что

- каждую формулу $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ можно преобразовать в бескванторную формулу $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ над сигнатурой, расширенной всеми требуемыми (не)равенствами, имеющую тот же арифметический смысл
- формула $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ имеет в интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ смысл совокупности систем линейных (не)равенств над $\mathbb{N}_0$
- если φ — предложение, то ψ — бескванторное предложение, для которого верно либо $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, либо $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \neg\psi$ ▼