Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Вне программы 01

Логические исчисления

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Многие методы решения самых разных задач, рассказывавшиеся в этом курсе, следовали одной и той же общей схеме:

- Определяются преобразуемые объекты

  семантические таблицы — дизъюнкты

  системы уравнений над термами — тройки Хоара

- Определяются способы получения одних объектов из других

  правила табличного вывода — правила резолюции и склейки

  правила алгоритма унификации — правила вывода в логике Хоара

- Определяются простейшие объекты, начинающие или завершающие применение метода обоснования (*смотря с какой стороны «читать» этот метод*)

  закрытые таблицы — пустой дизъюнкт

  приведённые системы уравнений — истинные формулы

- Собственно метод — это «типовое» совмещение этих трёх компонентов для определения и использования успешного вывода

Логическое исчисление состоит из следующих компонентов:

- Алфавит и синтаксис, задающие множество преобразуемых объектов, формул исчисления (ФИ)
- Подмножество ФИ, называемх аксиомами (и начинающих обоснование)
- Набор правил вывода, задающих способы получения одних ФИ из других

Для удобного описания аксиом и правил вывода исчисления нередко применяются схемы формул исчисления (СФ): записи, отличающиеся от ФИ тем, что на месте «обычных» элементов ФИ в них могут быть записаны параметры

При использовании СФ или наборов СФ принято явно обозначать, какие параметры в них используются и какие значения могут иметь эти параметры, и тогда можно говорить о том, что

- схеме формулы отвечают всевозможные формулы, получающиеся заменой параметров на их возможные значения, и
- набору схем формул аналогично отвечают наборы формул

Например, если ФИ — это формулы логики высказываний, то схеме формулы

$$A \to A \vee B$$

с параметрами A и B, значениями которых являются произвольные формулы,

- отвечают, в числе прочих, формулы логики высказываний

$$x \to x \vee y$$
$$x \to x \vee x$$
$$x \mathbin{\&} y \to (x \mathbin{\&} y \vee x \mathbin{\&} z)$$

- не отвечают формулы логики высказываний

$$x \to y \vee z$$
$$x \vee y$$

Зачастую множество аксиом исчисления задаётся в виде набора схем аксиом: схем формул, таких что множество всех аксиом исчисления — это множество всех формул, отвечающих схемам аксиом

Правило вывода исчисления — это отношение произвольной ненолевой местности на множестве ФИ

Правило вывода $\mathcal{R}$ местности $(n+1)$ обычно записывается так:

$$\mathcal{R}\colon \ \frac{\Phi_1, \dots, \Phi_n}{\Psi},$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi$ — СФ

Нередко к такой записи добавляются ограничения на допустимые значения параметров СФ

Принято говорить, что ФИ ψ получается по правилу $\mathcal{R}$, изображённому выше, из ФИ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, если набор $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi)$ отвечает набору $(\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi)$ с учётом ограничений на значения параметров

Например, в резолютивном исчислении дизъюнктов ФИ — это дизъюнкты, нет аксиом, и есть ровно два правила:

$$\frac{D_1 \vee A_1,\ \ D_2 \vee \neg A_2}{(D_1 \vee D_2)\theta} \qquad\qquad \frac{D_1 \vee L_1 \vee L_2}{(D_1 \vee L_1)\eta}$$

Параметры этих правил —

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- A_1, A_2 — атомы
- L_1, L_2 — литеры
- θ, η — подстановки с ограничениями: $\theta \in \text{НОУ}(A_1, A_2)$, $\eta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

По этим правилам из дизъюнктов получаются их всевозможные резольвенты и склейки соответственно

Вывод ФИ φ_k в исчислении $\mathfrak{C}$ из множества ФИ Γ — это конечная последовательность ФИ

$$\varphi_1, \ldots, \ldots, \varphi_k,$$

в которой для каждого i верно хотя бы одно из трёх:

- $\varphi_i \in \Gamma$
- φ_i — аксиома исчисления $\mathfrak{C}$
- φ_i получается из строго предшествующих ей формул $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k}$ по какому-либо правилу исчисления

Доказательство формулы φ (*в исчислении*) — это её вывод из $\emptyset$

Формула φ выводима (доказуема), если существует вывод (доказательство) этой формулы

Например, в резолютивном исчислении дизъюнктов

- нет доказательств
- вывод и выводимость ФИ — это резолютивный вывод и резолютивная выводимость дизъюнкта