

# Математическая логика и логическое программирование

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 43

Логические программы:  
стековые вычисления

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

С математической точки зрения, в интерпретаторах логических программ обычно используется **стандартная стратегия** построения дерева вычислений, согласно которой для применения правила

- ▶ всегда выбирается самая левая подцель и
- ▶ дерево вычислений обходится в глубину согласно порядку правил

Но это только математический взгляд: в интерпретаторах обычно нет структур данных для представления деревьев, и концепция обхода дерева вычислений в глубину реализована в другом эффективном виде

Простейший эффективный способ организации перебора вычислений согласно стандартной стратегии основан на использовании **стека (магазина)**

Элемент стека соответствует вершине дерева вычислений, обход которой начат, но ещё не завершён

В элементе стека для вершины дерева, отвечающей вычислению  $Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, \theta_1} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_{k-1}, \theta_{k-1}} Q_k$ , сохранена основная информация об этом вычислении, необходимая для обхода и для выдачи ответа:

1. Запрос  $Q_k$
2. Множество целевых переменных  $V = \text{Var}_{Q_1}$
3. Частично вычисленный ответ  $(\theta_1 \dots \theta_{k-1})|_V$
4. Порядковый номер  $i$  правила, которое будет применяться к запросу следующим согласно обходу

Элементы стека в иллюстрациях будут перечисляться вертикально сверху вниз, аналогично расположению ярусов дерева вычислений

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
  - 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
  - 3 :  $q(\mathbf{b});$
  - 4 :  $r(\mathbf{c});$
  - 5 :  $s(\mathbf{b});$
- ? $p(X, Y), s(X)$

Начинаем вычисление:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
-------------------	------------	---------------	---

Применяем правило 1:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1

Правило 1 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	2

Правило 2 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
  - 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
  - 3 :  $q(\mathbf{b});$
  - 4 :  $r(\mathbf{c});$
  - 5 :  $s(\mathbf{b});$
- ? $p(X, Y), s(X)$

Применяем правило 3:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}\}$	1

Правило 1 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}\}$	2

Правило 2 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}\}$	3

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
  - 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
  - 3 :  $q(\mathbf{b});$
  - 4 :  $r(\mathbf{c});$
  - 5 :  $s(\mathbf{b});$
- ? $p(X, Y), s(X)$

Правило 3 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}\}$	4

Применяем правило 4:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}\}$	4
? $s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}, Y/\mathbf{c}\}$	1

Правило 1 применить нельзя: ...

Правило 2 применить нельзя: ...

Правило 3 применить нельзя: ...

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
  - 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
  - 3 :  $q(\mathbf{b});$
  - 4 :  $r(\mathbf{c});$
  - 5 :  $s(\mathbf{b});$
- ? $p(X, Y), s(X)$

Правило 4 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	{X, Y}	{X/ <b>b</b> }	4
? $s(\mathbf{b})$	{X, Y}	{X/ <b>b</b> , Y/ <b>c</b> }	5

Применяем правило 5:

? $p(X, Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	{X, Y}	{X/ <b>b</b> }	4
? $s(\mathbf{b})$	{X, Y}	{X/ <b>b</b> , Y/ <b>c</b> }	5
□	{X, Y}	{X/ <b>b</b> , Y/ <b>c</b> }	1

Выдаём ответ {X/**b**, Y/**c**}

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
  - 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
  - 3 :  $q(\mathbf{b});$
  - 4 :  $r(\mathbf{c});$
  - 5 :  $s(\mathbf{b});$
- ? $p(X, Y), s(X)$

К  $\square$  ничего применить нельзя, **откат** (извлекаем голову стека, увеличиваем номер команды):

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}\}$	4
? $s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}, Y/\mathbf{c}\}$	6

Правила кончились, откат:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
? $q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
? $r(Y), s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}\}$	5

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
- 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
- 3 :  $q(\mathbf{b});$
- 4 :  $r(\mathbf{c});$
- 5 :  $s(\mathbf{b});$
- 6 :  $?p(X, Y), s(X)$

Правило 5 применить нельзя:

$?p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
$?q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
$?r(Y), s(\mathbf{b})$	$\{X, Y\}$	$\{X/\mathbf{b}\}$	6

Правила кончились, откат:

$?p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
$?q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	4

Правило 4 применить нельзя: ...

Правило 5 применить нельзя:

$?p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	1
$?q(X), r(Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	6

Правила кончились, откат:

$?p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	2
------------------	------------	---------------	---

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
  - 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
  - 3 :  $q(\mathbf{b});$
  - 4 :  $r(\mathbf{c});$
  - 5 :  $s(\mathbf{b});$
- ? $p(X, Y), s(X)$

Применяем правило 2:

? $p(X, Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	2
? $r(X), s(X)$	{X, Y}	{Y/X}	1

Правило 1 применить нельзя: ...

Правило 2 применить нельзя: ...

Правило 3 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	2
? $r(X), s(X)$	{X, Y}	{Y/X}	4

Применяем правило 4:

? $p(X, Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	2
? $r(X), s(X)$	{X, Y}	{Y/X}	4
? $s(\mathbf{c})$	{X, Y}	{X/ $\mathbf{c}$ , Y/ $\mathbf{c}$ }	1

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
  - 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
  - 3 :  $q(\mathbf{b});$
  - 4 :  $r(\mathbf{c});$
  - 5 :  $s(\mathbf{b});$
- ? $p(X, Y), s(X)$

Правило 1 применить нельзя: ...

Правило 2 применить нельзя: ...

Правило 3 применить нельзя: ...

Правило 4 применить нельзя: ...

Правило 5 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	2
? $r(X), s(X)$	{X, Y}	{Y/X}	4
? $s(\mathbf{c})$	{X, Y}	{X/ <b>c</b> , Y/ <b>c</b> }	6

Правила кончились, откат:

? $p(X, Y), s(X)$	{X, Y}	$\varepsilon$	2
? $r(X), s(X)$	{X, Y}	{Y/X}	5

## Пример

- 1 :  $p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y);$
  - 2 :  $p(X, X) \leftarrow r(X);$
  - 3 :  $q(\mathbf{b});$
  - 4 :  $r(\mathbf{c});$
  - 5 :  $s(\mathbf{b});$
- ? $p(X, Y), s(X)$

Правило 5 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	2
? $r(X), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\{Y/X\}$	6

Правила кончились, откат:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	3
-------------------	------------	---------------	---

Правило 3 применить нельзя: ...

Правило 4 применить нельзя: ...

Правило 5 применить нельзя:

? $p(X, Y), s(X)$	$\{X, Y\}$	$\varepsilon$	6
-------------------	------------	---------------	---

Правила кончились, откат

Стек пуст, обход завершён

Такая стековая организация вычислений логических программ используется и на практике, но обычно в более «продвинутом» виде

Например, в начале 1980-х годов исследователь Дэвид Уоррен предложил вычислительную модель (Warren abstract machine), задающую модель памяти, набор стеков для эффективной работы с ней и особую архитектуру системы команд для удобной низкоуровневой интерпретации логических программ в предложенной модели и системе стеков

Но знание устройства машины Уоррена в этом курсе не нужно: далее будут обсуждаться предикаты, предназначенные для управления вычислениями программ, и чтобы их понять, достаточно знать, как устроены деревья вычислений и стековые вычисления