

Лекция 1. Функции k -значной логики.
Формулы. Теоремы о представлении функций
 k -значной логики в 1-й и 2-й формах.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Множество E_k^n

Пусть $k \geq 2$ — целое число и $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Будем рассматривать множество E_k^n , $n \geq 1$. Множество E_k^n будем также называть **n -мерным k -значным кубом**.

Отметим, что $|E_k^n| = k^n$.

Любой элемент из E_k^n будем называть **набором (длины n)**.

При этом составляющие набор элементы множества E_k будем называть его **разрядами, или компонентами**.

Как правило, наборы из множества E_k^n будем обозначать греческими буквами начала алфавита: α , β и т. д., возможно, с индексами.

При этом если $\alpha \in E_k^n$, то $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; если $\alpha_j \in E_k^n$, то $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,n})$.

Лексико-графический порядок на E_k^n

Номером $\|\alpha\|$ набора $\alpha \in E_k^n$ назовем целое неотрицательное число, для которого запись в k -ичной системе счисления имеет вид $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

Другими словами,

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot k^{n-i}.$$

Отметим, что $0 \leq \|\alpha\| \leq k^n - 1$.

(Линейное) упорядочивание наборов из E_k^n в порядке возрастания их номеров назовем лексико-графическим (или алфавитным) порядком на E_k^n .

Функция k -значной логики

Функцией k -значной логики (или k -значной функцией) называем произвольное отображение из E_k^n в E_k , $n \geq 1$.

Т.е. если $f : E_k^n \rightarrow E_k$, то f является n -местной функцией k -значной логики.

При этом если $f = f(x_1, \dots, x_n)$, то говорим, что f — функция n переменных x_1, \dots, x_n .

Множество всех n -местных функций k -значной логики обозначим $P_k^{(n)}$, и пусть $P_k = \bigcup_{n \geq 1} P_k^{(n)}$.

Функции k -значной логики

При $k = 2$ функции k -значной логики называются **функциями алгебры логики**, или **булевыми функциями**.

При $k \geq 3$ функции k -значной логики называются **функциями многозначной логики**.

Таблица значений

Функции k -значной логики можно задавать **таблицами значений**.

Упорядочим все наборы множества E_k^n в *лексико-графическом* порядке и сопоставим каждому набору значение функции на нем:

x_1	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	...	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	...	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
	...			
0	...	0	$k-1$	$f(0, \dots, 0, k-1)$
	...			
$k-1$...	$k-1$	0	$f(k-1, \dots, k-1, 0)$
	...			
$k-1$...	$k-1$	$k-2$	$f(k-1, \dots, k-1, k-2)$
$k-1$...	$k-1$	$k-1$	$f(k-1, \dots, k-1, k-1)$

Вектор значений

Если наборы из E_k^n упорядочены лексико-графически, то функция $f \in P_k^{(n)}$ однозначно задается правым столбцом ее таблицы значений. Назовем его **вектором значений** функции f и обозначим α_f . Другими словами,

$$\alpha_f = (f(\alpha_0), f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{k^n-1})) \in E_k^{k^n},$$

где наборы $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k^n-1}$ из E_k^n перечислены в лексико-графическом порядке.

Число k -значных функций n переменных

Предложение 1. Пусть $k \geq 2$. При $n \geq 1$ верно равенство:
 $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

Доказательство.

Каждую функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^{(n)}$ можно задать таблицей с k^n строками.

В каждой строке этой таблицы — значение этой функции на соответствующем наборе из k возможных значений из E_k .

При этом разные таблицы определяют различные функции.

Поэтому $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.



Функции k -значной логики

Рассмотрим некоторые важные k -значные функции:

1. константы: $0, 1, \dots, k - 1$ (или $c_a^n(x_1, \dots, x_n) = a, a \in E_k$).

2. $n = 1$:

1) x — тождественная функция переменной x ;

2) $\bar{x} = x + 1(\text{mod } k)$ — отрицание Поста x ;

3) $\sim x = (k - 1) - x$ — отрицание Лукасевича x ;

4) $-x = k - x(\text{mod } k)$ — минус x :

x	x	\bar{x}	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k - 1$	0
1	1	2	$k - 2$	$k - 1$
...				
$k - 2$	$k - 2$	$k - 1$	1	2
$k - 1$	$k - 1$	0	0	1

Функции k -значной логики

5) характеристические функции $J_a(x)$, $j_a(x)$, где $a \in E_k$:

$$J_a(x) = \begin{cases} k - 1, & x = a, \\ 0, & x \neq a, \end{cases} \quad j_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a, \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

Функции k -значной логики

3. $n = 2$:

1) $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ — сложение, вычитание и умножение по модулю k ;

2) $\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases}$ — минимум из x и y ;

3) $\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y, \\ y, & x < y, \end{cases}$ — максимум из x и y .

4) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 0, & x < y, \end{cases}$ — усеченная разность;

5) $x \rightarrow y = \begin{cases} k - 1, & x \leq y, \\ (k - 1) - (x - y), & x > y, \end{cases}$ — импликация.

Функции k -значной логики

4. обобщения:

$$1) \min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \dots, x_n));$$

$$2) \max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \dots, x_n));$$

$$3) x^s = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_s \text{ — степень, } s \geq 1.$$

Функции k -значной логики

Каким функциям алгебры (двузначной) логики соответствуют функции k -значной логики при $k \geq 3$?

n	$P_k, k \geq 3$	P_2
	$0, 1, \dots, k - 1$	$0, 1$
$n = 1$	x $\bar{x}, \sim x$ $J_0(x), j_0(x)$ $J_{k-1}(x), j_{k-1}(x)$	x \bar{x} \bar{x} x
$n = 2$	$\min(x, y)$ $\max(x, y)$ $x + y$ $x \cdot y$	$x \& y$ $x \vee y$ $x \oplus y$ $x \cdot y$

Функции k -значной логики

В k -значной логике аналогично двузначной логике вводятся понятия **существенной и несущественной переменных**, **формулы над множеством функций и функции, определяемой формулой**.

Существенные и несущественные переменные

Переменная x_i (или i -я переменная) называется **существенной** для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_k$, что

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq Const.$$

Т.е. переменная x_i является существенной, если все другие переменные можно так определить, что полученная функция одной переменной x_i принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Равенство функций

Считаем, что функции, полученные друг из друга добавлением или удалением несущественных переменных, — неотличимы.

Функции f и g называем **равными**, если конечным числом удалений или добавлений несущественных переменных из них можно получить совпадающие функции.

Пример. Функции $f_1(x) = x$ и $f_2(x, y) = x$ — неотличимы.

Селекторы (проекция)

Рассмотрим функции e_i^n , где $i = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$:

$$e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i \in P_k.$$

Функции e_i^n называются **селекторами**, или **проекциями**.

Положим:

$$I_k = \{e_i^n \mid 1 \leq i \leq n, n \geq 1\} \subseteq P_k.$$

Добавление несущественных переменных

Как можно добавлять несущественные переменные к функции?

Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, то **добавить** несущественную переменную x_{n+1} к f можно, пользуясь функциями из I_k :

$$h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^2(x_n, x_{n+1})) \in P_k.$$

Или:

$$h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(e_1^{n+1}, \dots, e_n^{n+1}) \in P_k.$$

Удаление несущественных переменных

Как можно удалять несущественные переменные из функции?

Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и x_n — несущественная переменная функции f , то **удалить** несущественную переменную x_n из f можно **отождествлением** переменных:

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}) \in P_k.$$

Формула

Считаем, что задано (счетное) множество переменных X .

Пусть $A \subseteq P_k$, причем каждая функция из A имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

Формула над множеством A определяется по индукции.

1. *Базис индукции.* Если x — переменная (из X), то выражение x — формула.
2. *Индуктивный переход.* Если F_1, \dots, F_m — уже построенные формулы (не обязательно различные) и f — обозначение m -местной функции из A , то выражение $f(F_1, \dots, F_m)$ — формула.

Формулы

Пример. Пусть $A = \{0, 1, \dots, k - 1, \sim x, x^2, x \cdot y\} \subseteq P_5$.

Тогда:

$F_1 = x$ формула по базису индукции для переменной x ;

$F_2 = x^2$ формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы F_1 и функции $x^2 \in A$;

$F_3 = 3$ формула по индуктивному переходу для функции $3 \in A$;

$F_4 = 3 \cdot x^2$ формула по индуктивному переходу для уже построенных формул F_3 , F_2 и функции $x \cdot y \in A$;

$F_5 = \sim (3 \cdot x^2)$ формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы F_4 и функции $\sim x \in A$;

и т. д.

Функция, определяемая формулой

Пусть F — формула над множеством A , $A \subseteq P_k$, в которой встречаются только переменные x_1, \dots, x_n (не обязательно все).

Тогда формула F задает некоторую **функцию** $f_F \in P_k$ переменных x_1, \dots, x_n (возможно, зависящую не от всех переменных существенно).

Функция, определяемая формулой

Значение функции $f_F(x_1, \dots, x_n)$ на наборе $\alpha \in E_k^n$ определяется по индукции.

1. *Базис индукции.* Если $F = x_i$, где x_i — переменная, то

$$f_F(\alpha) = \alpha_i.$$

2. *Индуктивный переход.* Если $F = f(F_1, \dots, F_m)$, где F_1, \dots, F_m — формулы и f — обозначение m -местной функции из A , то

$$f_F(\alpha) = f(f_{F_1}(\alpha), \dots, f_{F_m}(\alpha)).$$

Здесь пользуемся тем, что f обозначает какую-то функцию из A .

Функция, определяемая формулой

Другими словами:

1) если $F = x_i$, где x_i — переменная, то $f_F(x_i) = x_i$, т. е. f_F — функция, тождественно равная переменной x_i ;

2) если $F = f(F_1, \dots, F_m)$, где F_1, \dots, F_m — формулы и f — обозначение m -местной функции из A , то

$$f_F(x_1, \dots, x_n) = f(f_{F_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{F_m}(x_1, \dots, x_n)),$$

т. е. f_F является соответствующей композицией функций $f \in A$ и f_{F_1}, \dots, f_{F_m} .

Функции, определяемые формулами

Пример. Найдем функцию $f_{F_5}(x) \in P_5$, которая задается формулой F_5 :

x	x^2	$3 \cdot x^2$	$\sim (3 \cdot x^2)$
0	0	0	4
1	1	3	1
2	4	2	2
3	4	2	2
4	1	3	1

Значения функции $f_{F_5}(x)$ на каждом наборе значений ее переменной x записаны в самом правом столбце.

Эквивалентные формулы

Пусть F_1, F_2 — формулы над множеством A , $A \subseteq P_k$, в которых встречаются только переменные x_1, \dots, x_n (не обязательно все).

Если для любого набора $\alpha \in E_k^n$ верно $f_{F_1}(\alpha) = f_{F_2}(\alpha)$, то формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**.

Другими словами, формулы F_1 и F_2 — эквивалентны, если они определяют равные функции, т. е. функции f_{F_1} и f_{F_2} равны.

Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$.

Тождества

Если F_1 и F_2 — эквивалентные формулы, то выражение

$$F_1 = F_2$$

называется **ТОЖДЕСТВОМ**.

Верны следующие свойства:

- 1) коммутативность связок \cdot , $+$, \min , \max ;
- 2) ассоциативность связок \cdot , $+$, \min , \max ;
- 3) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

И многие другие.

Доказательство тождеств

Примеры.

1. Докажем тождество: $-(\bar{x}) = \sim x$.

$$-(\bar{x}) = -(x + 1) = (k - 1) - x = \sim x.$$

2. Докажем тождество: $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$.

$$\begin{aligned} & \sim \max(\sim x, \sim y) = \\ & = (k - 1) - \begin{cases} (k - 1) - x, & (k - 1) - x \geq (k - 1) - y, \\ (k - 1) - y, & (k - 1) - x < (k - 1) - y, \end{cases} = \\ & = \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases} = \min(x, y). \end{aligned}$$

Доказательство тождеств

Примеры.

3. Докажем тождество: $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \min(x, y)$.

$$\begin{aligned}
 x \dot{-} (x \dot{-} y) &= x \dot{-} \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 0, & x < y, \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} x - (x - y), & x \geq y, \\ x, & x < y, \end{cases} = \begin{cases} y, & x \geq y, \\ x, & x < y, \end{cases} = \min(x, y).
 \end{aligned}$$

Выразимость

Пусть $A \subseteq P_k$ — множество k -значных функций.

Рассмотрим некоторые множества A , над которыми можно выразить любую функцию из P_k .

1-я форма

Теорема 1 (о 1-й форме). Пусть $k \geq 2$. При $n \geq 1$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \max_{\sigma \in E_k^n} \min (J_{\sigma_1}(x_1), \dots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_k^n$ и подставим его в левую и правую части равенства из утверждения теоремы:

$$f(\alpha) = \max_{\sigma \in E_k^n} \min (J_{\sigma_1}(\alpha_1), \dots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\sigma)).$$

1-я форма

Доказательство. Набор σ пробегает все значения из множества E_k^n , а набор α — какой-то набор из E_k^n .

1. Если $\sigma \neq \alpha$, то найдется такое i , $1 \leq i \leq n$, что $\sigma_i \neq \alpha_i$.
Значит, $J_{\sigma_i}(\alpha_i) = 0$, откуда в этом случае:

$$\min(J_{\sigma_1}(\alpha_1), \dots, J_{\sigma_{i-1}}(\alpha_{i-1}), 0, J_{\sigma_{i+1}}(\alpha_{i+1}), \dots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\sigma)) = 0.$$

2. Если $\sigma = \alpha$, то для всех i , $i = 1, \dots, n$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а значит, $J_{\sigma_i}(\alpha_i) = k - 1$. Поэтому в этом случае:

$$\min(k - 1, \dots, k - 1, f(\alpha)) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = \max(0, \dots, 0, f(\alpha), 0, \dots, 0) = f(\alpha).$$

1-я форма

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \bar{x} \in P_3$:

x	f
0	1
1	2
2	0

Запишем ее в 1-й форме:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \max(\min(J_0(x), f(0)), \min(J_1(x), f(1)), \min(J_2(x), f(2))) = \\
 &= \max(\min(J_0(x), 1), \min(J_1(x), 2), \min(J_2(x), 0)) = \\
 &= \max(\min(J_0(x), 1), J_1(x)).
 \end{aligned}$$

2-я форма

Теорема 2 (о 2-й форме) Пусть $k \geq 2$. При $n \geq 1$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \dots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

Доказательство повторяет доказательство предыдущего утверждения.

2-я форма

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = J_2(x + x^2) \in P_4$:

x	x^2	$x + x^2$	f
0	0	0	0
1	1	2	3
2	0	2	3
3	1	0	0

Запишем ее во 2-й форме:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= j_0(x) \cdot f(0) + j_1(x) \cdot f(1) + j_2(x) \cdot f(2) + j_3(x) \cdot f(3) = \\
 &= j_0(x) \cdot 0 + j_1(x) \cdot 3 + j_2(x) \cdot 3 + j_3(x) \cdot 0 = 3j_1(x) + 3j_2(x).
 \end{aligned}$$

1-я и 2-я формы

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \min(x^2, y) \in P_3$
($f(x, y)$ указано на пересечении строки x и столбца y):

$x \setminus y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

1-я форма для f :

$$f(x, y) = \max(\min(J_1(x), J_1(y), 1), \min(J_1(x), J_2(y), 1), \min(J_2(x), J_1(y), 1), \min(J_2(x), J_2(y), 1)).$$

2-я форма для f :

$$f(x, y) = j_1(x)j_1(y) + j_1(x)j_2(y) + j_2(x)j_1(y) + j_2(x)j_2(y).$$

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.
2. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.