Схемы из функциональных элементов. N-разрядный сумматор, оценка сложности СФЭ для n-разрядного сумматора. N-разрядный вычитатель и оценка его сложности.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Схемой из функциональных элементов (СФЭ)

$$S(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$$

в базисе $B_0 = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$ называется

1) ориентированный граф $G = (V, E)$ без ориентированных циклов, причем в графе G полустепень захода любой его вершины не превосходит двух;

2) любая вершина графа G с полустепенью захода, равной нулю, называется входной (или входом) и ей приписывается какая-то входная переменная x_i;

3) любая вершина графа G с полустепенью захода, не равной нулю, называется внутренней;

СФЭ

4) любой вершине графа G с полустепенью захода, равной единице, приписывается отрицание $^{-}$;

5) любой вершине графа G с полустепью захода, равной двум, приписывается либо конъюнкция $\&$, либо дизъюнкция $\vee$;

6) некоторые (входные или внутренние) вершины графа G называются выходными (или выходами) и им приписываются (различные) выходные переменные $y_1, \ldots, y_m$.

Сложностью $L(S)$ СФЭ S называется число ее внутренних вершин.

Функции, вычисляемые СФЭ

Пусть СФЭ S в базисе $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ построена по орграфу $G = (V, E)$.

Тогда в любой ее вершине $v \in V$ **вычисляется** некоторая **функция** $f_v(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, по индукции однозначно определяемая по СФЭ.

Функции, вычисляемые СФЭ

Базис индукции. Если v — входная вершина СФЭ и ей приписана входная переменная x_i, то

$$f_v = x_i,$$

т. е. в вершине v вычисляется функция, тождественно равная переменной x_i.

Индуктивный переход. 1. Если v — внутренняя вершина СФЭ и ей приписано отрицание $\bar{\ }$, причем $e = (w, v) \in E$, то

$$f_v = \bar{f}_w,$$

т. е. в вершине v вычисляется функция, равная отрицанию той функции, которая вычисляется в вершине w, из которой ведет дуга в вершину v.

Функции, вычисляемые СФЭ

Индуктивный переход. 2. Если v — внутренняя вершина СФЭ и ей приписана конъюнкция & (соответственно, дизъюнкция $\vee$), причем $e_1 = (w_1, v) \in E$, $e_2 = (w_2, v) \in E$, где $e_1 \neq e_2$, то

$$f_v = f_{w_1} \cdot f_{w_2} \quad (f_v = f_{w_1} \vee f_{w_2}),$$

т. е. в вершине v вычисляется функция, равная конъюнкции (соответственно, дизъюнкции) тех функций, которые вычисляются в вершинах w_1 и w_2, из которых ведут дуги в вершину v.

Обычно считают, что СФЭ $S(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ вычисляет систему функций $F(S) = \{f_1, \ldots, f_m\}$, которые вычисляются в выходных вершинах $y_1, \ldots, y_m$.

Числа в двоичной системе счисления

Пусть $n \in \mathbb{N}$.

Если $(x_1, \ldots, x_n) \in E_2^n$, где $E_2 = \{0, 1\}$, то положим

$$(x_1, \ldots, x_n)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 2^{n-i}.$$

Т. е. $(x_1, \ldots, x_n)_2$ обозначает число, которое в двоичной системе счисления записывается как $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Отметим, что

$$0 \leqslant (x_1, \ldots, x_n)_2 \leqslant 2^n - 1.$$

Сумматор

Сумматором S_n порядка n, $n \geqslant 1$, называется такая СФЭ с $2n$ входами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и $n+1$ выходами $z_0, z_1, \ldots, z_n$, что

$$(z_0, z_1, \ldots, z_n)_2 = (x_1, \ldots, x_n)_2 + (y_1, \ldots, y_n)_2.$$

Т. е. сумматор S_n на своих выходах вычисляет сумму двух n-разрядных чисел, которые подаются на его входы.

Сумматор S_n также называется n-разрядным сумматором.

Сумматор S_1

Построим одноразрядный сумматор $S_1(x, y; z_0, z_1)$.

Найдем функции $z_0(x, y)$ и $z_1(x, y)$:

x	y	z_0	z_1
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Поэтому

$$z_0 = x \cdot y, \quad z_1 = (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \cdot (\overline{x \cdot y}).$$

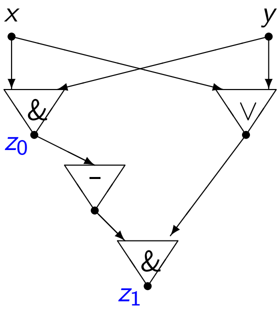
Значит, в базисе B_0 можно построить сумматор S_1 со сложностью 4.

Сумматор S_1

Одноразрядный сумматор $S_1(x, y; z_0, z_1)$:

$$z_0 = x \cdot y, \quad z_1 = (x \vee y) \cdot (\overline{x \cdot y}).$$

S_1 :



Ячейка сумматора

Назовем **ячейкой сумматора** S такую СФЭ с тремя входами x, y, p и двумя выходами q, z, что

$$(q, z)_2 = (x)_2 + (y)_2 + (p)_2.$$

Несложно проверить, что

$$q = x \cdot y \vee x \cdot p \vee y \cdot p, \quad z = x \oplus y \oplus p.$$

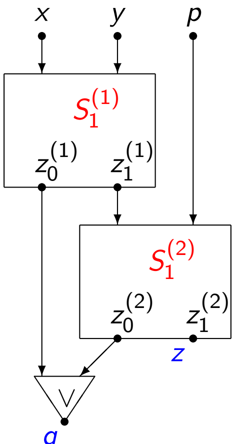
В базисе B_0 можно построить ячейку сумматора S со сложностью 9.

Ячейка сумматора

Ячейка сумматора $S(x, y, p; q, z)$:

$$q = x \cdot y \vee p(x \oplus y), \quad z = (x \oplus y) \oplus p.$$

S :



Сложность сумматора S_n

Теорема. *В базисе* $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ *можно построить сумматор* S_n *со сложностью* $9n - 5$.

Доказательство. Применим алгоритм сложения n-разрядных чисел $(x_1, \ldots, x_n)_2$ и $(y_1, \ldots, y_n)_2$ «в столбик».

Сложность сумматора S_n

Доказательство. Сначала возьмем одноразрядный сумматор S_1 и припишем его входам x_n и y_n.

Младший разряд выхода этого одноразрядного сумматора S_1 назовем выходом z_n, а старший разряд его выхода обозначим p_{n-1}.

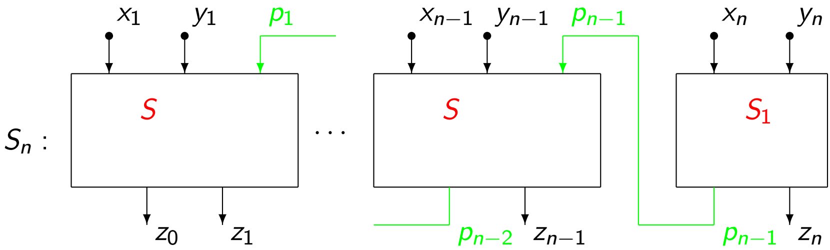
Далее для каждого $i = n-1, \dots, 1$ повторим следующие рассуждения.

Возьмем новую ячейку сумматора S, придадим ей номер i и двум ее входам припишем x_i, y_i, а на третий вход направим p_i.

Младший разряд выхода этой ячейки сумматора S с номером i назовем выходом z_i, а старший разряд ее выхода обозначим p_{i-1} при $i \geqslant 2$ и назовем выходом z_0 при $i = 1$.

Сложность сумматора S_n

Сумматор $S_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; z_0, z_1, \ldots, z_n)$:



Сложность сумматора S_n

Доказательство. Полученная в итоге СФЭ является n-разрядным сумматором S_n.

Оценим его сложность:

$$L(S_n) \leqslant (n-1)L(S) + L(S_1) \leqslant 9(n-1) + 4 = 9n - 5.$$

$\square$

Вычитатель

Вычитателем W_n порядка n, $n \geqslant 1$, называется такая СФЭ с $2n$ входами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и n выходами $u_1, \ldots, u_n$, что

$$(u_1, \ldots, u_n)_2 = (x_1, \ldots, x_n)_2 - (y_1, \ldots, y_n)_2,$$

если

$$(x_1, \ldots, x_n)_2 \geqslant (y_1, \ldots, y_n)_2.$$

Т. е. вычитатель W_n на своих выходах вычисляет разность двух n-разрядных чисел, которые подаются на его входы, при условии, что первое из этих чисел не меньше второго.

Если первое из этих чисел меньше второго, то входы неправильные, и не важно, что вычисляется на выходах.

Вычитатель W_n также называется n-разрядным вычитателем.

Вспомогательная лемма

Лемма. *Если* $x_1, \dots, x_n \in E_2$, *то*

$$(x_1, \dots, x_n)_2 + (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)_2 = 2^n - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим сумму:

$$\begin{array}{r|cccc} & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ + & \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_n \\ \hline & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array}$$

Далее заметим, что

$$(1, \dots, 1)_2 = 2^n - 1.$$

$\square$

Сложность вычитателя W_n

Теорема. *В базисе* $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ *можно построить вычитатель* W_n *со сложностью* $11n - 5$.

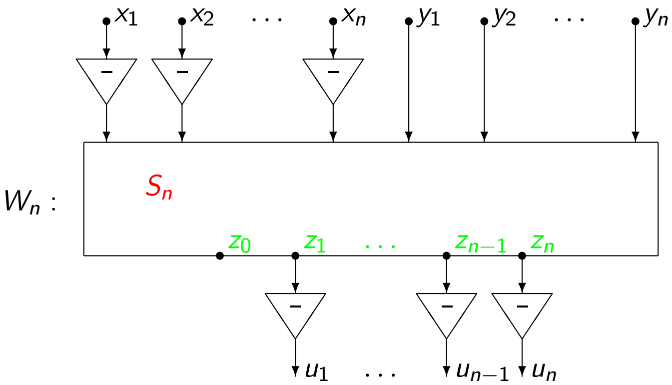
Доказательство. Построим вычитатель W_n в соответствии с тождеством:

$$(u_1, \ldots, u_n)_2 = 2^n - 1 - ((y_1, \ldots, y_n)_2 + (2^n - 1 - (x_1, \ldots, x_n)_2)) .$$

При построении применим вспомогательную лемму.

Сложность вычитателя W_n

Вычитатель $W_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; u_1, \ldots, u_n)$:



Сложность вычитателя W_n

Оценим сложность полученного вычитателя W_n:

$$L(W_n) \leqslant 2n + L(S_n) \leqslant 2n + 9n - 5 = 11n - 5.$$

$\square$

Литература

1. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 62–66.