Математическая логика

(mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы $\rightarrow$ Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 4–5

Выполнимые и общезначимые формулы
Модели
Логическое следствие
Проблема общезначимости формул
Подстановки
Метод семантических таблиц
в логике предикатов
Корректность табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

Вступление

Продолжаем обсуждение **логики предикатов**

Вспомним на примере, что есть что

Сигнатура:

$$\left\langle \{\mathbf{c}\}, \left\{\mathbf{f}^{(1)}\right\}, \left\{\mathrm{P}^{(1)}\right\}\right\rangle$$

Формула:

$$\varphi = \mathrm{P}(\mathbf{c}) \to \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))$$

Интерпретация $\mathcal{I}$:

предметная область: $\{d_1, d_2\}$

$\overline{\mathbf{c}} = d_1$ $\quad \overline{\mathbf{f}}(d_1) = \overline{\mathbf{f}}(d_2) = d_1$ $\quad \overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbf{t}$, $\quad \overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbf{f}$

Отношение выполнимости:

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

Выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ выполнима в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \mid\models \varphi$[1]), если **существует** набор предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$, такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$

Формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ истинна в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$), если **для любого** набора предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$

Формула φ выполнима ($\mid\models \varphi$[1]), если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ общезначима (тождественно истинна; $\models \varphi$), если она истинна в любой интерпретации

Формула φ противоречива (невыполнима, тождественно ложна), если она не является выполнимой

[1] Как и раньше, это необщеупотребимое обозначение

Выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$\begin{aligned} \varphi &: \quad \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \psi &: \quad \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \chi &: \quad \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

Интерпретация $\mathcal{I}_1$: $\mathrm{D} = \{d\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbf{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_1 \models \psi \qquad \mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация $\mathcal{I}_2$: $\mathrm{D} = \{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbf{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbf{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \psi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что мы доказали, что

1. формулы φ, ψ выполнимы
2. формулы ψ, χ необщезначимы

А как доказать общезначимость φ и невыполнимость χ?

Выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний, несущих в себе “нетривиальную” (“полезную”) информацию

Общезначимые формулы — это (*казалось бы*) банальности, тавтологии, знания, не несущие в себе никакой “полезной” информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

Модели

Пусть F — **множество предложений** (φ — **предложение**),
и $\mathcal{I}$ — **интерпретация**

Если каждая формула из F (формула φ) **истинна** в $\mathcal{I}$,
то $\mathcal{I}$ — модель для F (для φ)

$$\boxed{\text{интерпретация } \mathcal{I} \underset{\text{истинно (выполняется) в}}{\overset{\text{является моделью для}}{\rightleftarrows}} \text{предложение } \varphi}$$

Модель для множества F - это мир, устройство которого **адекватно** всем предложениям из F

Пища для размышлений

- Какие интерпретации являются моделью для пустого множества формул?
- Существуют ли множества формул, не имеющие модели?

Модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$\mathrm{C}(\mathrm{x})$: “x — круг”
$\mathrm{S}(\mathrm{x})$: “x — квадрат”
$\mathrm{B}(\mathrm{x})$: “x — чёрный предмет”
$\mathrm{W}(\mathrm{x})$: “x — белый предмет”
$\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$: “предмет x лежит под предметом y”

Рассмотрим такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y}\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))))$$

“любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом”

и такие интерпретации:

$$\mathcal{I}_1: \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \square & \square \end{array} \qquad \mathcal{I}_2: \begin{array}{cc} \square & \bullet \\ & \square \end{array}$$

Тогда $\mathcal{I}_1$ **является моделью** для φ, а $\mathcal{I}_2$ **не является**

Логическое следствие

Предложение φ называется логическим следствием множества предложений F ($\mathsf{F} \models \varphi$), если любая модель для F является моделью для φ, то есть если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \mathsf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Если F — изначально имеющиеся "базовые" знания,
то логическое следствие φ — это
необходимо следующее из них "производное" знание

Пример-пояснение:

- $\forall x\ P(x) \models P(\mathbf{c})$: из знания "все предметы обладают свойством P" необходимо следует знание "предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P"
- $P(\mathbf{c}) \not\models \forall x\ P(x)$: из одного только частного знания "предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P" не следует общее знание "все предеметы обладают свойством P"

Логическое следствие

Предложение φ называется логическим следствием множества предложений F ($\mathsf{F} \models \varphi$), если любая модель для F является моделью для φ, то есть если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \mathsf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Если F — изначально имеющиеся "базовые" знания,
то логическое следствие φ — это
необходимо следующее из них "производное" знание

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это **извлечение логических следствий** из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей "разумной деятельности": экспертные системы, (автоматическое и ручное) доказательство теорем, формальный анализ программ, . . . , . . .

Логическое следствие (пример)

Покажем, что представляют собой логические следствия, на простом, но содержательном и показательном примере

Известно, что:

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов

Начнём с сигнатуры алфавита; в неё войдут:

- константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво**
- предикатный символ $\mathrm{L}^{(2)}$: $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ “икс любит игрека”

Логическое следствие (пример)

Условия задачи переписываются так:

- Даша любит Сашу
$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$$
- Саша любит пиво
$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$$
- Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:
$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво}) \\ \varphi_4 &= \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y})\ \&\ \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x})) \end{aligned}$$
- Любит ли кто-нибудь дашу?
  Правда ли, что из знаний $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ необходимо следует знание
$$\varphi_0 = \exists x\ L(\mathrm{x}, \textbf{Даша})\ ?$$

В конечном итоге задача переписывается так:

проверить соотношение $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_0$

Логическое следствие

Теорема(*о логическом следствии*). Для любого предложения φ и любого множества предложений $\mathrm{F} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\mathrm{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Rightarrow$): Предположим, что $\mathrm{F} \models \varphi$

Рассмотрим **произвольную** интерпретацию $\mathcal{I}$

Если $\mathcal{I} \not\models \mathrm{F}$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n$, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \mathrm{F}$

Так как $\mathrm{F} \models \varphi$, имеем: $\mathcal{I} \models \varphi$ — а значит, снова верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Итог: для **любой** интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Но это и означает общезначимость формулы $\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Логическое следствие

Теорема(*о логическом следствии*). **Для любого предложения φ и любого множества предложений $\mathrm{F} = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ справедлива равносильность**

$$\mathrm{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Leftarrow$): Предположим, что $\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Рассмотрим **произвольную** модель $\mathcal{I}$ для множества F:

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n$

Так как формула $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$ общезначима, верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Согласно семантике "$\to$", это означает, что верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, **произвольная** модель $\mathcal{I}$ для множества F является моделью для φ, то есть $\mathrm{F} \models \varphi$ ▼

Проблема общезначимости формул

Чтобы уметь получать новые знания из имеющихся и анализировать достоверность знаний, необходимо понимать **законы**, связывающие достоверность различных знаний

Общезначимые формулы представляют собой один из способов записи таких законов — например, достоверность знаний φ, полученных из достоверных знаний $\mathsf{F} = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, равносильна общезначимости формулы

$$\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Это показывает важность проблемы общезначимости формул:

для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:

$$\models \varphi\ ?$$

Проблема общезначимости формул

Решение этой проблемы будет сопряжено с ответами на простые и не очень простые вопросы:

- как общезначимость связана с выполнимостью и невыполнимостью?
- насколько проверка общезначимости/выполнимости/невыполнимости затрудняется наличием свободных переменных?
- как адаптировать *метод семантических таблиц* логики высказываний к логике предикатов?
- есть ли другие методы проверки общезначимости формул?
- насколько (теоретически) **трудно** проверить общезначимость формулы?
- ...

Проблема общезначимости формул

формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ общезначима

$\psi = \forall\widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)$

$\varphi(\widetilde{x}^n) = \neg\psi(\widetilde{x}^n)$ $\qquad$ $\psi(\widetilde{x}^n) = \neg\varphi(\widetilde{x}^n)$ $\qquad$ предложение ψ общезначимо

формула $\psi(\widetilde{x}^n)$ невыполнима

$\varphi = \exists\widetilde{x}^n\ \psi(\widetilde{x}^n)$

$\varphi = \psi$ $\updownarrow$ противоположный ответ $\qquad$ предложение φ невыполнимо

формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ выполнима

$\psi = \exists\widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)$

предложение ψ выполнимо

$\forall\widetilde{x}^n$ — сокращение для $\forall x_1 \ldots \forall x_n$

$\exists\widetilde{x}^n$ — сокращение для $\exists x_1 \ldots \exists x_n$

Проблема общезначимости формул

Утверждение

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ общезначима} \arrow[r, bend left, "\psi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[d, bend left, "\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \text{предложение } \psi \text{ общезначимо} \\
\text{формула } \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ невыполнима} \arrow[u, bend left, "\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[r, bend left, "\varphi = \exists \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi = \psi"', "\text{противоположный ответ}"] & \text{предложение } \varphi \text{ невыполнимо} \\
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ выполнима} \arrow[r, bend left, "\psi = \exists \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \text{предложение } \psi \text{ выполнимо}
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Напрямую следует из определений выполнимости, невыполнимости и общезначимости

Проблема общезначимости формул

“Лобовой” способ проверки общезначимости формулы, аналогичный построению столбца значений булевой функции, мог бы представлять собой **перебор всех интерпретаций** с проверкой истинности в них формулы

Этот способ не подходит для логики предикатов:

- Как задать бесконечную интерпретацию и проверить истинность формулы в ней?
- Можно ли ограничиться перебором только какого-нибудь множества конечных интерпретаций?

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{z})) \to \exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

Формула φ необщезначима:

Предметная область: натуральные числа

$R(x,y) =$ “$x < y$”

Посылки φ: никакое число не может быть меньше себя

если $x < y$ и $y < z$ то $x < z$

Вывод φ: существует максимальное натуральное число

Посылки верны, но вывод неверен

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x, x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x, y) \,\&\, R(y, z) \to R(x, z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x, y)$$

Общее истолкование:

“Если бинарное отношение R антирефлексивно и транзитивно, то существует элемент, максимальный относительно R”

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

Общее истолкование:

“Если R — отношение **строгого частичного порядка**,
то существует элемент, максимальный относительно R”

Любое **конечное** непустое частично упорядоченное множество содержит максимальный элемент

(последнее можно легко доказать индукцией по числу элементов множества, либо просто сослаться на более общее утверждение: **лемму Цорна**) ▼

Метод семантических таблиц

Итог: никак нельзя решить проблему "$\models \varphi$?" явным перебором всех интерпретаций с проверкой истинности φ в каждой из них

Попробуем решить эту проблему при помощи метода семантических таблиц:

- рассуждая "от противного",
  попытаемся построить **контрмодель** $\mathcal{I}$: $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- при построении будем работать с семантическими таблицами:
  предположениями о том,
  что выполняется и не выполняется в $\mathcal{I}$
- эти предположения структурируем в виде дерева вывода,
  строящегося по правилам табличного вывода
  $$\frac{\mathsf{T}_0}{\mathsf{T}_1(,\mathsf{T}_2)}$$
- если **все** предположения **явно** опровергнуты
  закрытыми таблицами, то признаем формулу общезначимой

Метод семантических таблиц

Семантическая таблица (логики предикатов) — это пара множеств формул: $T = \langle\, \Gamma \mid \Delta \,\rangle$

Пусть $\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}$ — все **свободные** переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица T выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации, такие что

- $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$ для любой формулы φ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \psi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$ для любой формулы ψ из Δ

Таблица T закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T атомарна, если содержит только атомы

Пример

Следующая семантическая таблица **выполнима**:

$$\langle\, \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}) \mid \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\rangle$$

(подтверждается интерпретацией: $\{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbf{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbf{f}$
и набором d_1, d_2 значений свободных переменных x, y)

Метод семантических таблиц

Теорема(*о табличной проверке общезначимости*)

$$\models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{таблица } \langle \ \mid \varphi \ \rangle \text{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}] \text{ для любой интерпретации } \mathcal{I}$$

$$\text{и любого набора предметов } \widetilde{d^n}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{таблица } \langle \ \mid \varphi \ \rangle \text{ невыполнима } \blacktriangledown$$

Утверждение. **Любая закрытая таблица невыполнима**

Утверждение

Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство (утверждений). Следует из определений атомарности, закрытости и выполнимости таблиц

Метод семантических таблиц

Основная проблема, возникающая при попытке адаптировать метод семантических таблиц *в логике высказываний* к логике предикатов: как сформулировать правила преобразования формул, начинающихся с $\forall$ и $\exists$?

Пример: $\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$?

$$\langle \ \mid \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c}) \ \rangle$$

$$\downarrow \longleftarrow \text{избавляемся от импликации } (R\!\to)$$

$$\langle\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \,\rangle$$

$$\downarrow ? \longleftarrow \textbf{подставляем} \text{ константу } \mathbf{c} \text{ на место } \mathrm{x}$$

$$\langle\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{c}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \,\rangle$$

Строго определим, что такое “**подставляем**”

Подстановки

Подстановка — это отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Область подстановки θ: $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathsf{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- $\theta(\mathtt{x}_\mathtt{i}) = t_i \qquad (1 \leq i \leq n)$

Пара $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$ называется связкой

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathsf{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение (терм или формула), и θ — подстановка.

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x}) & (\mathrm{x} \in \mathsf{Var}) \\
\mathbf{c}\theta = \mathbf{c} & (\mathbf{c} \in \mathsf{Const}) \\
\mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (\mathbf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \dots, t_n \in \mathsf{Term}) \\
\mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred}) \\
(\varphi \mathbin{\&} \psi)\theta = (\varphi\theta \mathbin{\&} \psi\theta) & (\varphi, \psi \in \mathsf{Form}) \\
(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta) & \\
(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta) & \\
(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta) & \\
(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}; \\
(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & \qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y}) \text{ для } \mathrm{y} \neq \mathrm{x})
\end{array}
$$

Подстановки

Пример применения подстановки

φ: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$
θ: $\{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathrm{x},\ \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{z})\}$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в φ

φ: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

К этим вхождениям применяется θ

$\varphi\theta$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{x})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}))) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Подстановки

При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность

Например:

$\varphi(\mathtt{x})$: $\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists y\ \mathrm{P}(\mathtt{x}, \mathrm{y})$

"если у каждого есть дед, то у $\mathtt{x}$ тоже есть дед"

Очевидно, что $\models \varphi(\mathtt{x})$

Применим к φ подстановку $\theta = \{\mathtt{x}/\mathrm{y}\}$

$\varphi(\mathtt{x})\theta$: $\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y})$

"если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед"

Очевидно, что $\not\models \varphi(x)\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная $\mathtt{x}$ свободна для терма t в формуле φ, если ни одно свободное вхождение переменной $\mathtt{x}$ не лежит в областях действия кванторов, связывающих переменные множества Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathtt{x_1}/t_1, \dots, \mathtt{x_n}/t_n\}$ — правильная для формулы φ, если для каждой связки $\mathtt{x_i}/t_i$ переменная $\mathtt{x_i}$ свободна для терма t_i в формуле φ

Например, подстановка $\{x/y\}$ **не является правильной** для формулы

$$\forall x\, \exists y\, P(x, y) \to \exists y\, P(x, y)$$

а подстановка $\{x/\mathbf{f}(u, v)\}$ — **правильная** для этой формулы

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

правила для логических связок выглядят так же,
как и в логике высказываний:

$$L\& \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi,\ \psi \mid \Delta \,\rangle} \qquad R\& \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\&\, \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle, \langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \psi \,\rangle}$$

$$L\vee \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \vee \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta \,\rangle, \langle\, \Gamma,\ \psi \mid \Delta \,\rangle} \qquad R\vee \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \vee \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi,\ \psi \,\rangle}$$

$$L\!\to \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \to \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \psi \mid \Delta \,\rangle, \langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle} \qquad R\!\to \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \to \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta,\ \psi \,\rangle}$$

$$L\neg \frac{\langle\, \Gamma,\ \neg\varphi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle} \qquad R\neg \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \neg\varphi \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta \,\rangle}$$

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

$$L\forall\,\frac{\langle\ \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\,\varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\,\varphi,\ \ \varphi\{\mathtt{x}/t\} \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\exists\,\frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathtt{x}\,\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathtt{x}\,\varphi,\ \ \varphi\{\mathtt{x}/t\}\ \rangle}$$

Дополнительное ограничение:

t — произвольный терм, такой что подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ правильна для φ

$$L\exists\,\frac{\langle\ \Gamma,\ \exists \mathtt{x}\,\varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\forall\,\frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \forall \mathtt{x}\,\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\}\ \rangle}$$

Дополнительное ограничение:
$\mathbf{c}$ — произвольная константа,
не содержащаяся в формулах из Γ, Δ и в φ

Метод семантических таблиц

Пара слов об ограничениях для правил $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

Если разрешить использовать любые подстановки в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle\ \forall x\ \exists y\ P(x,y) \mid \exists y\ P(y,y)\ \rangle}{\langle\ \forall x\ \exists y\ P(x,y),\ \exists y\ P(y,y) \mid \exists y\ P(y,y)\ \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять “несвежие” константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle\ \exists x\ P(x) \mid P(\mathbf{c})\ \rangle}{\langle\ P(\mathbf{c}) \mid P(\mathbf{c})\ \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Метод семантических таблиц

Табличный вывод — это корневое дерево, размеченное семантическими таблицами, построенное по правилам вывода и по каждой конечной ветви завершающееся закрытой или атомарной таблицей

(дословно переносится из логики высказываний)

Успешный табличный вывод (табличное опровержение) — это конечный вывод, **все** листья которого помечены закрытыми таблицами

Определения, относящиеся к семантическим таблицам *логики высказываний*, удалось почти без изменений адаптировать к логике предикатов

К сожалению, с утверждениями об устройстве табличных выводов так поступить не выйдет — чтобы понять, почему, можно внимательно изучить несколько **примеров** табличных выводов

Примеры табличных выводов

$$\langle \,|\, \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x})) \to (\forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\,\mathrm{B}(\mathrm{x}))\rangle$$

$$\Big\downarrow R\!\to$$

$$\langle \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x}))\,|\,\forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\,\mathrm{B}(\mathrm{x})\rangle$$

$$\Big\downarrow R\!\to$$

$$\langle \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x})), \forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x})\,|\,\forall \mathrm{x}\,\mathrm{B}(\mathrm{x})\rangle$$

$$\Big\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x})), \forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x})\,|\,\mathrm{B}(\mathbf{c})\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x})), \forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}), \mathrm{A}(\mathbf{c})\,|\,\mathrm{B}(\mathbf{c})\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x})), \forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}), \mathrm{A}(\mathbf{c}) \to \mathrm{B}(\mathbf{c}), \mathrm{A}(\mathbf{c})\,|\,\mathrm{B}(\mathbf{c})\rangle$$

$$\swarrow \quad L\!\to \quad \searrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x})), \\ \forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}), \mathrm{B}(\mathbf{c}), \mathrm{A}(\mathbf{c}) \end{array} \,\middle|\, \mathrm{B}(\mathbf{c}) \right\rangle \qquad \left\langle \begin{array}{l} \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x})), \\ \forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}), \mathrm{A}(\mathbf{c}) \end{array} \,\middle|\, \mathrm{B}(\mathbf{c}), \mathrm{A}(\mathbf{c}) \right\rangle$$

Закрытая таблица　　　　Закрытая таблица

При этом $\models \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{B}(\mathrm{x})) \to (\forall \mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\,\mathrm{B}(\mathrm{x}))$

Примеры табличных выводов

$$\langle | \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow R\rightarrow$$
$$\langle \exists x\, P(x) | \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle P(\mathbf{c_1}) | \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow R\forall$$
$$\langle P(\mathbf{c_1}) | P(\mathbf{c_2}) \rangle$$

Незакрытая атомарная таблица

При этом $\not\models \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$

Примеры табличных выводов

$$\langle | \forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow R\!\to$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y) | \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1},y) | \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow R\exists$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1},y) | \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow L\exists$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) | \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) | \exists y\ \forall x\ P(x,y), P(\mathbf{c_4},\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\infty$$

При этом $\not\models \forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists y\ \forall x\ P(x,y)$

Примеры табличных выводов

$$\langle | \exists x\ \forall y\ P(x,y) \rightarrow \forall y\ \exists x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow R\rightarrow$$
$$\langle \exists x\ \forall y\ P(x,y) | \forall y\ \exists x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y) | \forall y\ \exists x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow R\forall$$
$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y) | \exists x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) | \exists x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow R\exists$$
$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) | \exists x\ P(x,\mathbf{c_2}), P(\mathbf{c_4},\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\infty$$

При этом $\models \exists x\ \forall y\ P(x,y) \rightarrow \forall y\ \exists x\ P(x,y)$

Корректность табличного вывода

Лемма(*о корректности правил табличного вывода*)
Для любого правила табличного вывода $\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_1(,\mathrm{T}_2)}$

$L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\rightarrow$, $R\rightarrow$, $L\neg$, $R\neg$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правила $L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\rightarrow$, $R\rightarrow$, $L\neg$, $R\neg$

Доказательство корректности этих правил *почти дословно* переносится из доказательства *той же леммы* для *логики высказываний* — нужно только:

- начать с "Пусть $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы"
- заменить "существует интерпретация $\mathcal{I}$" на "существуют интерпретация $\mathcal{I}$ **и набор предметов** $\widetilde{d}^n$"
- заменить (не)выполнимость формулы в интерпретации $\mathcal{I}$ на (не)выполнимость формулы в интерпретации $\mathcal{I}$ **на наборе предметов** $\widetilde{d}^n$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi, \varphi\{\mathtt{x}_0/t\} \mid \Delta\rangle\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, то она останется выполнимой

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi, \varphi\{\mathtt{x}_0/t\} \mid \Delta\rangle\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, то она останется выполнимой

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

При этом:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d^n}] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[t[\widetilde{d^n}], \widetilde{d^n}] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi\{\mathtt{x}_0/t\}[\widetilde{d^n}]$$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется **правильность** подстановки $\{\mathtt{x}_0/t\}$ для φ?

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \exists \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если "верно для $\overline{\mathbf{c}}$", то "существует предмет, для которого верно"

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$ — а значит, существует предмет d_0, такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \exists \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \varphi\,\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle}$

$\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{J}$, отличающуюся от $\mathcal{I}$ только оценкой константы **c**: $\overline{\mathbf{c}} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\,\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\})[\widetilde{d}^n]$

Кроме того,

- $\mathcal{J} \models \psi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{J} \not\models \chi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что **c** — "свежая" константа?

Для правил $R\forall$, $R\exists$ доказательство аналогично ▼

Корректность табличного вывода

Теорема(*о корректности табличного вывода*)
Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима

Доказательство. Следует из определения табличного вывода, леммы корректности правил табличного вывода и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие. Если для таблицы $\langle \ \mid \varphi \ \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

Ближайшие оставшиеся вопросы:

- Верно ли утверждение в обратную сторону?
  (*таблица невыполнима* $\Rightarrow$ *существует успешный вывод*)
- Можно ли **построить** успешный вывод, если он существует?
- Есть ли более "приятные" методы проверки общезначимости?
- Насколько трудна проверка общезначимости формул?