Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

Дополнительные главы кибернетики и теории управляющих систем

Москва 2008

Оглавление

1 Асимптотические оценки высокой степени точности **3**

§1 Некоторые модификации КС, ИКС. Верхние оценки числа схем контактного типа, нижние мощностные оценки функции Шеннона . 3

§2 Универсальные системы ФАЛ и их построение на основе селекторных разбиений БП 9

§3 Мультиплексорные ФАЛ и обощенное разложение. Оптимальная по задержке реализация мультиплексорных ФАЛ в произвольном базисе 12

§4 Задача синтеза схем для функций из специальных классов, примеры её решения и мощностные нижние оценки. Инвариантные классы С. В. Яблонского, теорема о числе инвариантных классов 13

§5 Принцип локального кодирования и примеры его применения. Синтез схем для не всюду определённых ФАЛ 18

2 Синтез схем для индивидуальных функций и оценки их сложности **21**

§1 Средняя проводимость схемы. Асимптотика контактной сложности дешифраторов и универсальных систем функций 21

§2 Незабиваемые множества функций. Асимптотика сложности мультиплексора в некоторых классах схем . 23

§3 Сложность линейной функции в классе схем из функциональных элементов 27

§4 Сферические функции. Сложность линейной и других функций в классе контактных схем 30

§5 Теорема Храпченко. Сложность линейной функции в классе π–схем . 33

Литература **37**

Глава 1

Асимпотические оценки высокой степени точности

§1 Некоторые модификации КС, ИКС. Верхние оценки числа схем контактного типа, нижние мощностные оценки функции Шеннона

Рассмотрим одну модификацию КС, которая является, по существу, частным случаем т. н. релейно-контактных схем (см., например, [**?**]) и связана с операцией присоединения управляющих БП (входов) КС к ее выходам.

Для КС $\Sigma = \Sigma\,(x_1, \ldots, x_n; 1; z_1, \ldots, z_m)$ определим обычным образом операцию *присоединения ее управляющей БП x_i к выходу z_j*, которая применима, если БП x_i входит в Σ без отрицаний, а ее контакты не лежат на простых проводящих цепях, соединяющих вход 1 с выходом z_j. Заметим, что при этом ФАЛ f_j, реализуемая на выходе z_j КС Σ, не зависит от x_i. В результате выполнения указанной операции в графе КС Σ происходит снятие БП z_j, сопоставление связанной с ней вершине внутренней БП y и замена всех пометок x_i на пометку y.

Аналогично определяется операция (одновременного) присоединения нескольких управляющих БП КС Σ к ее выходам, при выполнении которой каждой участвующей в присоединениях выходной вершине Σ сопоставляется только одна внутренняя БП, причем разным вершинам сопоставляются разные БП. Любая из полученных таким образом схем называется *итеративной контактной схемой (ИКС) на базе КС* Σ. Под сложностью $L\,(\Sigma')$ ИКС Σ' на базе КС Σ понимается сложность $L\,(\Sigma)$.

Функционированние ИКС $\Sigma\,(x_1, \ldots, x_n;\, z_1, \ldots, z_m)$ на базе КС вида $\hat{\Sigma}\,(x_1, \ldots, x_n,\, y'_1, \ldots, y'_l;\, 1;\, y''_1, \ldots, y''_l,\, z_1, \ldots, z_m)$ с внутренними БП $y_i = y'_i = y''_i$, $i = 1, \ldots, l$, рассматривается в дискретные моменты времени. Для любого входного набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ при $t = 0,\ 1, \ldots$ происходит последовательное установление в различных вершинах 1 за счет образования цепей из проводящих к данному моменту контактов и 0 за счет образования разрезов из непроводящих к данному моменту контактов. Вершина u_i, связанная с БП y_i, $1 \leqslant i \leqslant l$, в которой установилось значение σ, начинает в слудующий момент управлять проводимостью контактов y_i и т.д. Считается, что в тех вершинах, в которых значение 0 и 1 не установились, имеется неопределенное значение 2. Этот процесс завершается, когда в каждой вершине окончательно устанавливается значение 0, 1 или 2. При этом ИКС Σ называется *комбинационной схемой* (*схемой*

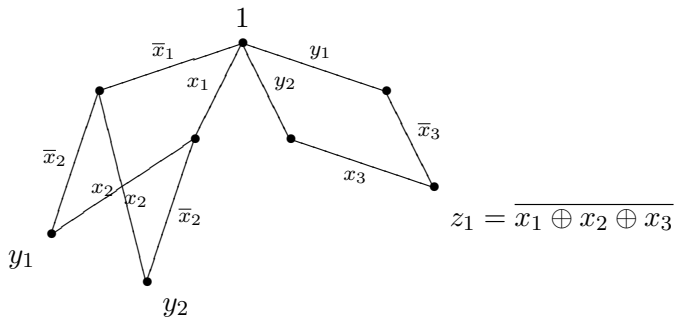

Рис. 1.1: Пример ИКС

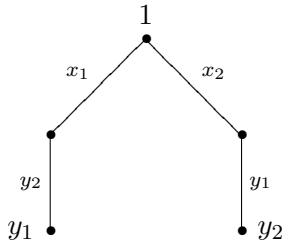

Рис. 1.2: Пример некомбинационной ИКС

без памяти), если для любого входного набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ её функционирование завершается определенными значениями во всех выходных вершинах $z_1, \ldots, z_m$, которые определяют значения ФАЛ $f_1, \ldots, f_m$, реализуемых Σ.

Пусть БП $y_1 = y_1' = y_1'', \ldots, y_l = y_l' = y_l''$ ИКС $\Sigma\,(x_1, \ldots, x_n;\ z_1, \ldots, z_m)$ на базе КС $\hat{\Sigma}\,(x_1, \ldots, x_n,\ y_1', \ldots, y_l';\ 1;\ y_1'', \ldots, y_l'',\ z_1, \ldots, z_m)$ — упорядочены, и ФАЛ проводимости от 1 к y_i может существенно зависеть только от БП $x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_{i-1}$, тогда ИКС Σ будет комбинационной.

Обозначим, как обычно, через $\mathfrak{U}^{\text{ИКС}}$ класс всех комбинационных ИКС из неориентированных контактов, а через $\mathfrak{U}^{\text{ИКС}}\,(L, n)$ — множество ИКС от БП $X\,(n)$, которые имеют один выход, приведенную базу и сложность не более L. Тогда $\left\|\mathfrak{U}^{\text{ИКС}}\,(L, n)\right\|$ —, как обычно, число попарно неэквивалентных ИКС из $\mathfrak{U}^{\text{ИКС}}\,(L, n)$.

Лемма 1.1. *Число попарно неизоморфных связных графов с параллельными ребрами, содержащих p вершин и q ребер, $q \geqslant p - 1$, не больше, чем $4^{p-1}\left(\frac{3p^2}{q-p+1}\right)^{q-p+1}$, если*

$$q \leqslant \frac{p\,(p+1)}{2} - 2, \tag{1.1}$$

и не более, чем $4^{p-1} \cdot 6^{q-p+1}$ *в остальных случаях.*

Доказательство. Подсчет указанных графов можно организовать следующим образом: сначала выбирается остовное дерево, а потом оставшиеся ребра распределяются по всевозможным парам вершин с возможными повторениями. Остовное дерево можно выбрать 4^{p-1} способами, а число возможных распределений оставшихся ребер по парам вершин можно оценить сверху числом сочетаний с повторениями, при условии, что число пар вершин равно $\frac{p(p-1)}{2}$. Так как число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$, то, используя известное неравенство

$$\binom{m}{n} \leqslant \left(\frac{3m}{n}\right)^n,$$

получим следующую цепочку неравенств:

$$4^{p-1} \cdot \binom{\frac{p(p-1)}{2} + q - p}{q-p+1} \leqslant 4^{p-1} \cdot \left(3\left(1 + \frac{\frac{p(p-1)}{2} - 1}{q-p+1}\right)\right)^{q-p+1}. \tag{1.2}$$

Если выполняется неравенство (1.1), тогда $\frac{\frac{p(p-1)}{2}-1}{q-p+1} \geqslant 1$ и цепочку (1.2) можно продолжить следующим образом:

$$4^{p-1} \cdot \left(3\left(1 + \frac{\frac{p(p-1)}{2} - 1}{q-p+1}\right)\right)^{q-p+1} \leqslant 4^{p-1} \cdot \left(3\left(\frac{p^2}{2(q-p+1)} + \frac{p^2}{2(q-p+1)}\right)\right)^{q-p+1} \leqslant$$
$$\leqslant 4^{p-1} \cdot \left(\frac{3p^2}{q-p+1}\right)^{q-p+1}.$$

В противном случае, неравенства (1.2) можно продолжить следующим образом:

$$4^{p-1} \cdot \left(3\left(1 + \frac{\frac{p(p-1)}{2} - 1}{q-p+1}\right)\right)^{q-p+1} \leqslant 4^{p-1} \cdot (3(1+1))^{q-p+1} \leqslant 6^{q-p+1},$$

что завершает доказательство.

Лемма доказана. □

Следствие 1. *В случае ориентированных графов, оценки леммы умножаются на* 2^q.

Следствие 2. *Число попарно неизоморфных связанных неориентированных графов на* p *вершинах, содержащих не более* q *ребер, не превосходит*

$$4^q \cdot \max_{1 \leqslant p \leqslant q+1} \left(\frac{3p^2}{q-p+1}\right)^{q-p+1}.$$

Лемма 1.2. *Пусть a, m, τ, α - действительные параметры такие, что*

$$a \geqslant 2,\ m \geqslant 1,\ \tau \geqslant 1,\ \alpha \geqslant 0,$$

Тогда выполняется неравенство

$$\max_{0 \leqslant y \leqslant m} \left(\frac{ay^{\tau}}{m-y}\right)^{m-y} y^{\alpha m} \leqslant \left(\beta t m^{\alpha} (\log t)^{-\alpha-\tau}\right)^{m},$$

где $\beta = \beta(\alpha,\ \tau)$, $t = am^{\tau-1}$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$F(y) = \left(\frac{ay^{\tau}}{m-y}\right)^{m-y} y^{\alpha m},$$

$$f(y) = \ln F(y) = (m-y)\ln\left(\frac{ay^{\tau}}{m-y}\right) + \alpha m \ln y.$$

Далее через β_1, β_2, ... будем обозначать некоторые функции величин α и τ. Пусть $y = z \cdot m, m \in [0,1]$. Тогда, дифференцируя $f(y)$, получим

$$f'(y) = \frac{m(\tau+\alpha)}{y} - \ln\left(\frac{ay^{\tau}}{m-y}\right) - \tau + 1 =$$

$$= \underbrace{\frac{\tau+\alpha}{z} - \ln\left(\frac{z^{\tau}}{1-z}\right) - \tau + 1}_{\delta(z)} - \underbrace{\ln\left(am^{\tau-1}\right)}_{>0}.$$

Заметим, что $\delta(z) \to -\infty$ при $z \to 1$, и существует $\beta_1 < 1$ такое, что $f'(y) < 0$ при $y > \beta_1 m$. Пусть ξ является точкой максимума функции f, тогда $f'(\xi) = 0$ и $\xi \leqslant \beta_1 m$. Если обе части последнего неравенства умножить на -1, прибавить m, разделить на $(1-\beta_1)$, и возвести в степень $\frac{1}{\tau}$, то получим неравенство

$$m^{\frac{1}{\tau}} \leqslant \beta_2 (m-\xi)^{\frac{1}{\tau}}. \tag{1.3}$$

Распишем условие $f'(\xi) = 0$:

$$\frac{m(\tau+\alpha)}{\xi} - \tau \ln\left(\frac{e^{\left(1-\frac{1}{\tau}\right)} a^{\frac{1}{\tau}} \xi}{(m-\xi)^{\frac{1}{\tau}}}\right) = 0. \tag{1.4}$$

Обозначив $e^{1-\frac{1}{\tau}}$ через β_3, из (1.4) и (1.3) получаем

$$\ln\left(\beta_3 \frac{a^{\frac{1}{\tau}}\xi}{(m-\xi)^{\frac{1}{\tau}}}\right) \cdot \beta_3 \frac{a^{\frac{1}{\tau}}\xi}{(m-\xi)^{\frac{1}{\tau}}} = \frac{m(\tau+\alpha)}{\xi\tau} \cdot \beta_3 \frac{a^{\frac{1}{\tau}}\xi}{(m-\xi)^{\frac{1}{\tau}}} =$$

$$= \beta_3 \frac{\tau+\alpha}{\tau} \cdot \underbrace{\frac{ma^{\frac{1}{\tau}}}{(m-\xi)^{\frac{1}{\tau}}}}_{\geqslant m^{\frac{1}{\tau}}/\beta_2} \leqslant \beta_4 m^{1-\frac{1}{\tau}} a^{\frac{1}{\tau}},$$

где $\beta_4 = \beta_2\beta_3\frac{\tau+\alpha}{\tau}$. Обозначим $w = \beta_4 a^{\frac{1}{\tau}} m^{1-\frac{1}{\tau}}$, $u = \beta_3 \frac{a^{\frac{1}{\tau}}\xi}{(m-\xi)^{\frac{1}{\tau}}}$. Тогда, как показано выше, $w \geqslant u \ln u$, откуда $u \leqslant r\frac{w}{\ln w}$ для некоторой константы r (можно положить $r = 2$). Отсюда, положив $\beta_5 = r\beta_4^{-1}$, имеем

$$\frac{a^{\frac{1}{\tau}}\xi}{(m-\xi)^{\frac{1}{\tau}}} \leqslant \beta_5 a^{\frac{1}{\tau}} m^{1-\frac{1}{\tau}} \cdot \left(\ln\left(\beta_4 a^{\frac{1}{\tau}} m^{1-\frac{1}{\tau}}\right)\right)^{-1} = \frac{\beta_5}{\tau} \cdot \frac{(am^{\tau-1})^{1/\tau}}{\ln\left(\beta_4 (am^{\tau-1})^{1/\tau}\right)} \leqslant \frac{\beta_6 t^{\frac{1}{\tau}}}{\log t}, \quad (1.5)$$

где $t = am^{\tau-1}$. Из последнего неравенства следует, что

$$\xi \leqslant \frac{(m-\xi)^{1/\tau}}{a^{1/\tau}} \cdot \frac{\beta_6 t^{1/\tau}}{\log t} = \frac{\beta_6 m}{\log t} \cdot \left(\frac{m-\xi}{m}\right)^{1/\tau} \leqslant \frac{\beta_7 m}{\log t}. \quad (1.6)$$

Пользуясь неравенствами (1.5) и (1.6), получаем

$$\max_{0\leqslant y\leqslant m} F(y) = F(\xi) \leqslant \left(\frac{a^{\frac{1}{\tau}}\xi}{(m-y)^{\frac{1}{\tau}}}\right)^{\tau m} \xi^{\alpha m} \leqslant \left(\beta t m^{\alpha} (\log t)^{-\alpha-\tau}\right)^{m}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 1.1. *Для любых натуральных n, L выполняются неравенства*

$$\left\|\mathfrak{U}^{\mathrm{K}}(L,n)\right\| \leqslant \left(\frac{c_1 nL}{\log^2 L}\right)^{L}, \quad (1.7)$$

$$\left\|\mathfrak{U}^{\overrightarrow{\mathrm{K}}}(L,n)\right\| \leqslant \left(\frac{c_2 nL}{\log^2 L}\right)^{L}, \quad (1.8)$$

$$\left\|\mathfrak{U}^{\text{ИКС}}(L,n)\right\| \leqslant \left(\frac{c_3 (n+L)^2}{\log^3 (n+L)}\right)^{L+2n}, \quad (1.9)$$

где c_1, c_2 и c_3 - некоторые положительные константы.

Доказательство. Число попарно неэквивалентных КС из неориентированных (ориентированных) контактов можно оценить сверху числом попарно неизоморфных связанных неориентированных (ориентированных) графов, умноженных на число возможных распределений пометок ребер. Для этого воспользуемся следствием 2 леммы 1.1 и результатами леммы 1.2. Пусть

$$a = 3,\ m = q+1,\ \tau = 2,\ \alpha = 0,\ y = p,$$

тогда верны следующие неравенства:

$$4^q \cdot \max_{0\leqslant p\leqslant q+1} \left(\frac{3p^2}{q-p+1}\right)^{q-p+1} \leqslant \left(\frac{c_1 q}{\log^2 q}\right)^{q}. \quad (1.10)$$

В случае ориентированных КС по следствию 1 леммы 1.1 последнее неравенство умножается на 2^q, что повлияет только на константу в знаменателе дроби, которая станет равна $2c_1$. Остается заметить, что число возможных пометок КС с q ребрами равно $(2n)^q$ и что число ребер совпадает со сложностью КС. В итоге умножая неравенство 1.10 на n^q и заменяя q на L, получаем неравенства 1.7 и 1.8.

Так как число возможных распределений пометок ребер для ИКС с q контактами равно $(2n+p)^q$, то верны следующие неравенства:

$$\left\|\mathfrak{U}^{\text{ИКС}}(L,n)\right\| \leqslant 4^q \cdot \max_{0\leqslant p\leqslant q+1}\left(\frac{3p^2}{q-p+1}\right)^{q-p+1}(2n+p)^q. \tag{1.11}$$

Воспользуемся леммой 1.2. Пусть

$$a=3,\ m=q+2n+1,\ \tau=2,\ \alpha=1,\ y=p+2n,$$

тогда неравенства 1.11 можно продолжить следующим образом:

$$4^q \cdot \max_{0\leqslant p\leqslant q+1}\left(\frac{3p_2}{q-p+1}\right)^{q-p+1}(2n+p)^q \leqslant \left(\frac{c_3(n+q)^2}{\log^3(n+q)}\right)^{q+2n}.$$

В итоге, заменяя q на L, получим справедливость неравенства 1.9.

Теорема доказана. □

Теорема 1.2. *Для любого натурального n выполняются неравенства*

$$L^{\text{K}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1+\frac{2\log n - o(1)}{n}\right),$$
$$L^{\overrightarrow{\text{K}}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1+\frac{2\log n - o(1)}{n}\right),$$
$$L^{\text{ИКС}}(n) \geqslant \frac{2^{n-1}}{n}\left(1+\frac{\frac{5}{2}\log n - o(1)}{n}\right),$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся "мощностным" тождеством $\left\|\mathfrak{U}^{\text{P}}(L,n)\right\| = 2^{2^n}$, которое вытекает непосредственно из определений, а так же результатами теоремы 1.1 и известной верхней асимптотической оценкой для КС и ориентированных КС вида $\frac{2^n}{n}$. В случае ИКС справедливость этой оценки вытекает из того, что КС являются частным случаем ИКС. Таким образом в случае КС, используя неравенство 1.7, получаем следующие неравенства:

$$2^{2^n} \leqslant \left(\frac{c_1 n L^{\text{K}}(n)}{\log^2 L^{\text{K}}(n)}\right)^{L^{\text{K}}(n)}.$$

Логарифмируя неравенство, получим

$$2^n \leqslant L^{\text{K}}(n)\left(c_1' + n - 2\log n\right) + O(n).$$

В итоге получаем оценку

$$L^{\text{К}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n - 2\log n + c_1'} - O(n) \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{2\log n - o(1)}{n}\right)$$

Доказательство верхней оценки в случае ориентированных КС повторяет доказательство для неориентированных КС, а в случае ИКС необходимо произвести аналогичные выкладки, но с использованием неравенства 1.9. Таким образом получаем следующие неравенства:

$$2^{2^n} \leqslant \left(\frac{c_3\left(n + L^{\text{ИКС}}(n)\right)^2}{\log^3\left(n + L^{\text{ИКС}}(n)\right)}\right)^{L^{\text{ИКС}}(n)+2n}.$$

Логарифмируя неравенство, получим

$$2^n \leqslant L^{\text{ИКС}}(n)\left(c_3' + 2n - 5\log n\right) + O\left(n^2\right).$$

В итоге получаем оценку

$$L^{\text{ИКС}}(n) \geqslant \frac{2^{n-1}}{n - \frac{5}{2}\log n + c_3'} - O\left(n^2\right) \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\frac{5}{2}\log n - o(1)}{n}\right)$$

Теорема доказана. □

§2 Универсальные системы ФАЛ и их построение на основе селекторных разбиений БП.

Напомним определение дизъюнктивно-универсального множества (ДУМ) ФАЛ. Множество ФАЛ G называется ДУМ порядка m и ранга p, тогда и только тогда, когда для любой ФАЛ $g \in P_2(m)$ найдутся функции $g_1, \ldots, g_p$ такие, что $g = g_1 \vee \ldots \vee g_p$. Для построения схем в произвольных базисах необходимо обобщить понятие ДУМ ФАЛ. Пусть $\phi(y_1, \ldots, y_p)$ — ФАЛ, существенно зависящая от всех своих переменных. Тогда множество функций G называется *ϕ–универсальной системой (множеством) ФАЛ порядка m*, если и только если для всякой ФАЛ $g \in P_2(m)$ найдутся функции $g_1, \ldots, g_p \in G$ такие, что $g = \phi(g_1, \ldots, g_p)$. ДУМ ФАЛ можно построить следующим образом. Разобьём куб B^m произвольным образом на p множеств $S_1, \ldots, S_p$. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant p$ положим $G_i = \{g \in P_2(m) \mid g(x) \equiv 0$ при $x \notin S_i\}$. Тогда $G = G_1 \cup \ldots \cup G_p$ — ДУМ порядка m и ранга p. Теперь приведём похожий способ построения ϕ–УМ. Пусть функция $\phi(y_1, \ldots, y_p)$ существенно зависит от всех своих переменных. Тогда для всякого номера i, $1 \leqslant i \leqslant p$, найдутся константы $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$ такие, что $\phi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1}, y_i, \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) \equiv y_i \oplus \alpha_{i,i}$. Разобьём куб B^m на множества $S_1, \ldots, S_p$, и определим множества $G_1, \ldots, G_p$:

$$G_i = \{g \in P_2(m) \mid g(\beta) = \alpha_{i,j} \text{ если } \beta \in S_j, \text{ при } j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, p\}.$$

Тогда $G = G_1 \cup \ldots \cup G_p$ является ϕ–УМ порядка m и ранга p. Действительно, любую функцию $f \in P_2(m)$ можно представить в виде $f = \phi(g_1, \ldots, g_p)$, где $g_i \in G_i$ и $g_i(\beta) = f(\beta) \oplus \alpha_{i,i}$ при $\beta \in S_i$.

Рассмотрим для $p = 2t$ функцию $\phi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 y_{t+1} \vee y_2 y_{t+2} \vee \ldots \vee y_t y_{2t}$. Приведём пример ϕ–УМ для данной функции ϕ. Разобьём куб B^m на полосы $\delta_1, \ldots, \delta_p$. Каждая полоса δ_i представляет собой множество наборов, номера которых лежат в интервале $[n_i, n_{i+1})$, где $0 = n_1 < n_2 < \ldots < n_{p+1} = 2^m$. Положим
$G_1 = \{g(x_1, \ldots, x_m) \mid g(\alpha) = 1 \text{ при } \alpha \in \delta_{t+1},\ g(\alpha) = 0 \text{ при } \alpha \notin \delta_1 \cup \delta_{t+1}\}$
$G_2 = \{g(x_1, \ldots, x_m) \mid g(\alpha) = 1 \text{ при } \alpha \in \delta_{t+2},\ g(\alpha) = 0 \text{ при } \alpha \notin \delta_2 \cup \delta_{t+2}\}$
$\vdots$
$G_p = \{g(x_1, \ldots, x_m) \mid g(\alpha) = 1 \text{ при } \alpha \in \delta_1,\ g(\alpha) = 0 \text{ при } \alpha \notin \delta_1 \cup \delta_{t+1}\}$
Множество $G = G_1 \cup \ldots \cup G_p$ — “стандартное” (“диагональное”) ϕ–УМ. Рассмотрев разбиение $B^m = \delta_1 \cup \ldots \cup \delta_p$, в котором $|\delta_1| = \ldots = |\delta_t| = s'$ и $|\delta_{t+1}| = \ldots = |\delta_{2t}| = s''$, получим ϕ–УМ G мощности $t(2^{s'} + 2^{s''})$. Можно постороить и более компактное ϕ–УМ для рассматриваемой функции ϕ. Рассмотрим множество $\check{G} \subset P_2$ функций, равных единице на множестве $\delta_1 \cup \ldots \cup \delta_t$ и принимающих одинаковые значения на наборах с одинаковыми номерами внутри компонент $\delta_{t+1}, \ldots, \delta_{2t}$. Мощность множества $\check{G}$ будет равна $2^{s''}$. Воспользуемся тем фактом, что при $1 \leqslant i \leqslant t$ выполнено тождество $\phi(0, \ldots, 0, y_i, 0, \ldots, 0, y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots\ y_{2t}) \equiv y_i$. Отсюда следует, что множество $\hat{G} = G_1 \cup \ldots \cup G_t \cup \check{G}$ является ϕ–УМ мощности $t \cdot 2^{s'} + 2^{s''}$.

Определение. Пусть задана функция $\phi(y_1, \ldots, y_p)$. Разбиение $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$ множества $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$ называется *селекторным разбиением БП функции* ϕ тогда и только тогда, когда для всякого $i, i = 1, \ldots, d$ и для любой переменной $y \in Y_i$ найдутся константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_d$ такие, что при подстановке их вместо переменных из $Y_1, \ldots, Y_{i-1, Y_{i+1}, \ldots, Y_d}$ соответственно, выполняется равенство $\phi = y \oplus \alpha_i$.

Отметим, что если ϕ существенно зависит от всех своих БП, то тривиальное разбиение $Y_i = \{y_i\}$, $i = 1, \ldots, p$ является селекторным. Если функция ϕ симметрична по переменным y_i, y_j, то они не могут входить в одну и ту же компоненту селекторного разбиения (упражнение). Отсюда следует, что у функции $\phi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$ нет нетривиальных селекторных разбиений БП. У функции $\phi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 y_{t+1} \vee y_2 y_{t+2} \vee \ldots \vee y_t y_{2t}$ селекторным является, например, разбиение $Y_1 = \{y_1\}, \ldots, Y_t = \{y_t\}, Y_{t+1} = \{y_{t+1}, \ldots, y_{2t}\}$.

Утверждение 1. *Пусть $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$ селекторное разбиение переменных $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$ ФАЛ $\phi(y_1, \ldots, y_p)$, где $|Y_i| = p_i$, $i = 1, \ldots, p$, и пусть $s_1, \ldots, s_d$ — чётные числа, удовлетворяющие условию $s_1 p_1 + \ldots + s_d p_d \geqslant 2^m$. Тогда существует ϕ–УМ G порядка m такое, что*

1. $|G| \leqslant 2^{s_1} + \ldots + 2^{s_d}$,
2. $L^A(\vec{G}) \leqslant c|G| + O(d \cdot 2^{m+s/2})$, *где* $A \in \{\text{K}, \text{C}\}$ *и* $s = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} s_i$.

Доказательство. По определению селекторного разбиения, существует набор констант $\{\alpha_{i,j,k}\}$ таких, что для всякого j, $1 \leqslant j \leqslant d$ и любого k, $1 \leqslant k \leqslant p_j$ при подстановке в функцию ϕ констант $\alpha_{i,j,k}$, $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, d$ на места переменных из $Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_d$ соответственно, получается функция, существенно зависящая лишь от k–й переменной из компоненты Y_j. Разобьём куб B^m на последовательные полосы $\delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,p_1}, \delta_{2,1}, \ldots, \delta_{2,p_2}, \ldots, \delta_{d,1}, \ldots, \delta_{d,p_d}$. При этом ширина полосы $\delta_{j,k}$ равна s_j при всех k, $1 \leqslant k \leqslant p_j$. Суммарная ширина полос равна $\sum_j s_j p_j \geqslant 2^m$, следовательно куб B^m будет полностью покрываться данными полосами. Рассмотрим при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant d$, множество G_i всех функций, принимающих значение $\alpha_{i,j,k}$ на полосе $\delta_{j,k}$ при $j \neq i$, $k = 1, \ldots, p_j$, и принимающих одинаковые значения на наборах с одинаковыми номерами из полос $\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,p_i}$. При этом $|G_i| = s_i$, $i = 1, \ldots, d$. Покажем, что множество $G = G_1 \cup \ldots \cup G_d$ будет ϕ–УМ. Пусть $g \in P_2(m)$ — произвольная функция. Рассмотрим суперпозицию $\phi(g_1, \ldots, g_p)$, в которой на место каждой переменной из Y_i, $1 \leqslant i \leqslant d$ подставлены функции из множеств G_i соответственно. Пусть $\beta \in B^m$ — набор, принадлежащий полосе $\delta_{j,k}$. Тогда по построению множеств $G_1, \ldots, G_{j-1}, G_{j+1}, \ldots, G_d$, выполнено равенство $\phi(g_1(\beta), \ldots, g_p(\beta)) = g_l(\beta) \oplus c$, где g_l — функция, подставленная на место k–й переменной из множества Y_j, а c — константа, зависящая только от j, k. Выберем функцию $g_l \in G_j$ так, чтобы было выполнено равенство $g_l(\beta) = g(\beta) \oplus c$ при $\beta \in \delta_{j,k}$. Тогда на множестве $\delta_{j,k}$ будет выполнено равенство $\phi(g_1, \ldots, g_p) = g$. Действуя подобным образом, можно выбрать функции из $g_1, \ldots, g_p$ так, чтобы суперпозиция $\phi(g_1, \ldots, g_p)$ совпала с функцией g на всём кубе B^m.

Оценим сложность системы ФАЛ G. Реализуем систему G схемой Σ_G, построенной по методу каскадов при следующем порядке переменных: $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$. Подставив 0 вместо переменной x_m в функции из множества G_i, мы получим множество $G_i^{(0)}$, состоящее из $2^{s_i/2} \leqslant 2^{s/2}$ функций $m-1$ переменных. Систему этих функций можно реализовать со сложностью, не превосходящей $2^{s/2} \cdot 2^{m-1}$. Аналогично оценивается сложность системы $G_i^{(1)}$ ФАЛ, получающихся при подстановке константы 1 на место переменной x_m в функции из G_i. Суммированием по i получаем неравенство $L(G^{(0)} \cup G^{(1)}) \leqslant d \cdot 2^{m+s/2}$. Разложение функций из G по переменной x_m можно реализовать со сложностью $2|G|$, что даёт окончательную оценку

$$L(\Sigma_G) \leqslant 2|G| + d \cdot 2^{m+s/2}.$$

□

Замечание. В условии утверждения 1 допустимы равенства $s_i = 0$. При этом $|G_i| = 1$, и G_i состоит из одной ФАЛ, принимающей на каждой из полос δ_i, $i = 1, \ldots, p$ постоянные значения.

Пусть $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$ — разбиение множества Y, $|Y| = p$. *Энтропией разбие-*

ния D называется величина

$$H(D) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{|Y_i|}{|Y|} \log \frac{|Y_i|}{|Y|}$$

. Энтропия вырожденного разбиения равна нулю, а энтропия тривиального разбиения равна $\log p$. Можно показать, что $0 \leqslant H(D) \leqslant \log d$ для любого разбиения D, содержащего d компонент.

Утверждение 2. *Пусть* $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$ *— селекторное разбиение БП ФАЛ* $\phi(y_1, \ldots, y_p)$*, и пусть* $s > \log p$, $p(1-H(D)) \geqslant 2^m$*. Тогда найдётся* ϕ*–УМ* G *порядка* m *такое, что*

1. $|G| \leqslant 2^{s+2}$,
2. $L^A(\vec{G}) \leqslant c \cdot |G| + O(d \cdot 2^{m+s/2})$, *где* $A \in \{\mathrm{K}, \mathrm{C}\}$.

Доказательство. Выберем для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant d$ чётное число s_i такое, что $s + \log \frac{p_i}{p} \leqslant s_i \leqslant s + \log \frac{p_i}{p} + 2$, где $p_i = |Y_i|$. Проверим, что выполнено неравенство $s_1 p_1 + \ldots + s_d p_d \geqslant 2^m$. Заметим, что $s_i p_i \geqslant p_i(s + \log \frac{p_i}{p}) = p_i s + p \cdot \frac{p_i}{p} \log \frac{p_i}{p}$, и следовательно

$$\sum_{i=1}^{d} s_i p_i \geqslant \sum_{i=1}^{d} p_i s + p \cdot \sum_{i=1}^{d} \frac{p_i}{p} \log \frac{p_i}{p} = p(s - H(D)) \geqslant 2^m.$$

Осталось воспользоваться утверждением 1. □

§3 Мультиплексорные ФАЛ и обощенное разложение. Оптимальная по задержке реализация мультиплексорных ФАЛ в произвольном базисе

Рассмотрим набор БП $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Альтернированием набора $\widetilde{\alpha}$ назовем минимальной число отрезков постоянства, на которые распадается этот набор, и будем обозначать $\mathrm{Alt}\ (\widetilde{\alpha})$. Альтернирование произвольной ФАЛ g, $g \in P_2\,(n)$ равно альтернированию столбца ее значений. Некоторую ФАЛ g будем называть *ступенчатой* тогда и только тогда, когда $\mathrm{Alt}\ (g) \leqslant 1$. Не трудно видеть, что произвольная ступечантая ФАЛ является либо монотонной, либо антимонотонной.

Лемма 3.1. *Для любой ФАЛ* $g \in P_2\,(n)$ *выполняется неравенство:*

$$D\,(g) \leqslant 2\,\lceil \log n \rceil + \lceil \log\,(\mathrm{Alt}\ (g)) \rceil + 2. \tag{3.1}$$

Доказательство. □

Лемма 3.2. *Пусть φ — существенная ФАЛ от БП $y_1, \ldots, y_p$, а $f_1, \ldots, f_p$ — существеные ФАЛ от $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$, где $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ не имеют общих БП. Тогда для $f(z) = \varphi(f_1(z_1), \ldots, f_p(z_p))$ выпоняется неравентсво:*

$$\mathrm{alt} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant p} \mathrm{alt}\,(f_j) + \mathrm{alt}\,(\varphi)\,. \tag{3.2}$$

Доказательство. □

Лемма 3.3. *Для любой существенной ФАЛ $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ и любого разбиения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$, где $d \leqslant p$, куба B^n существуют ФАЛ $g_j(x, y_j)$, $j = 1, \ldots, d$, которые монотонно или антимонотонно завиясят от БП $y_1, \ldots, y_d$, а также ФАЛ $g_s(x)$, $s = d+1, \ldots, t$, такие, что $\varphi(g_1, \ldots, g_t) = \mu_\Delta(x, y_1, \ldots, y_d)$.*

Доказательство. □

Теорема 3.1. *Для любого натурального n ФАЛ $\mu_n(x, y)$ можно реализовать бесповторной по y формулой M_n, $M_n \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, где*

$$\begin{aligned} &T(M_n) \leqslant \tau_{\text{Б}} n + O(1)\,, \\ &L(M_n) \leqslant c \cdot 2^n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство. □

§4 Задача синтеза схем для функций из специальных классов, примеры её решения и мощностные нижние оценки. Инвариантные классы С. В. Яблонского, теорема о числе инвариантных классов.

Для множества ФАЛ $Q \subseteq P_2$ и натурального n через $Q(n)$ будем обозначать множество $Q \cap P_2(n)$. При этом множество Q и связанную с ним последовательность $Q(1)$, $Q(2)$, … будем называть *классом ФАЛ*. Аналогичным образом последовательность $Q(1)$, …, $Q(n)$, …, где $Q(n) \subseteq P_2^m(n)$ и $m = m(n)$, а также их объединение называется *классом операторов*. Пусть заданы класс ФАЛ или операторов Q, класс схем $\mathfrak{U}$ и функционал сложности $\mathfrak{L}$. Тогда *функцией Шеннона для* Q, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{L}$ называется функция натурального аргумента

$$\mathfrak{L}(Q(n)) = \max_{f \in Q(n)} \mathfrak{L}(f).$$

Для класса ФАЛ (операторов) Q введём функции

$$\mathfrak{J}(Q(n)) = \frac{\log|Q(n)|}{\log\log|Q(n)|}, \quad \sigma_Q(n) = \frac{\log|Q(n)|}{2^n},$$

причём из определения следует, что $0 \leqslant \sigma_Q(n) \leqslant 1$ для всех n.

Класс ФАЛ (операторов) Q называется *невырожденным* в том и только том случае, когда $\mathcal{J}(Q(n)) \gg n + m(n)$, то есть $\frac{\mathcal{J}(Q(n))}{n+m(n)} \to \infty$. Класс ФАЛ Q называется *строго невырожденным* в том и только том случае, когда $\log|Q(n)| \gg \log n$. Класс Q называется *ненулевым классом ФАЛ*, если и только если $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sigma_Q(n) > 0$.

Непосредственным применением мощностного метода получения нижних оценок можно установить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. *Если Q — невырожденный класс ФАЛ (операторов), то $\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}(Q(n)) \gtrsim \rho_{\text{Б}}\mathcal{J}(Q(n))$, $L^{\text{ИКС}}(Q(n)) \gtrsim \frac{1}{2}\mathcal{J}(Q(n))$. Если Q — строго невырожденный класс ФАЛ, то $L^{K}(Q(n)) \gtrsim \mathcal{J}(Q(n))$.*

Следствие. *Для всякого ненулевого класса ФАЛ Q выполнены неравенства $\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}(Q(n)) \gtrsim \rho_{\text{Б}}\sigma_Q(n)\frac{2^n}{n}$, $L^{\text{ИКС}}(Q(n)) \gtrsim \frac{1}{2}\sigma_Q(n)\cdot\frac{\log|Q(n)|}{n}$, $L^{K}(Q(n)) \gtrsim \sigma_Q(n)\frac{2^n}{n}$.*

Класс ФАЛ (операторов) Q называется *стандартным относительно функционала сложности $\mathcal{L}$ и класса схем $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$*, если выполнено асимптотическое неравенство $\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}(Q(n)) \lesssim \rho_{\text{Б}}\mathcal{J}(Q(n)) + O(n+m(n))$. Аналогично вводится определения стандартного класса операторов относительно других классов схем и функционалов сложности. Отметим, что если Q — невырожденный стандартный класс ФАЛ, то $\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}(Q(n)) \sim \rho_{\text{Б}}\mathcal{J}(Q(n))$.

Приведём пример стандартного класса ФАЛ. Рассмотрим множество $P_2(n,t) = \{f(x_1,\ldots,x_n) \mid \forall\alpha(\nu(\alpha) \geqslant t \Rightarrow f(\alpha) = 0)\}$. Его мощность равна, очевидно, 2^t. Любой функции $t = t(n) \geqslant 1$ можно поставить в соответствие класс ФАЛ Q, определённый равенствами $Q(n) = P_2(n, t(n))$.

Утверждение 4. *Для любой функции $t = t(n)$ соответствующий класс $Q(n) = P_2(n,t(n))$ является стандартным относительно $\mathcal{L}$ и класса $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, то есть $L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \lesssim \frac{t}{\log t} + O(n)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $t > 2^{n-1}$. Пусть $f \in P_2(n,t)$ — произвольная функция. Построим для неё СФЭ Σ_f по асимптотически наилучшему методу синтеза. На одном из этапов этого метода синтеза функция f разлагается по БП $x'' = (x_{q+1},\ldots,x_n)$:

$$f(x',x'') = \bigvee_{\sigma''\in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'')f_{\sigma''}(x'),$$

где $x' = (x_1,\ldots,x_q)$. Из принадлежности функции f классу $P_2(n,t)$ следует, что при $\nu(\sigma'') > \lceil t/2^q\rceil$ функция $f_{\sigma''}(x')$ тождественно равна нулю, следовательно из схемы Σ_f можно удалить подсхемы, реализующие такие подфункции. Получим схему Σ'_f со сложностью $L(\Sigma'_f) \lesssim \frac{t}{\log t}$.

Теперь рассмотрим случай $t \leqslant 2^{n-1}$. Найдётся число k такое, что $2^{n-k-1} < t \leqslant 2^{n-k}$. Тогда $f(x_1,\ldots,x_n) = \overline{x}_1\cdot\ldots\cdot\overline{x}_k\cdot f'(x_{k+1},\ldots,x_n)$. Функция f' принадлежит классу $P_2(n-k,t')$, где $t' > 2^{n-k-1}$, и для неё уже можно применить рассуждения из предыдущего случая. Получим $L(\Sigma_f) \leqslant L(\Sigma_{f'}) + O(n) \lesssim \frac{t}{\log t} + O(n)$. $\square$

Следствие. *Если* $\frac{t}{\log t} \gg n$, *то* $Q(n) = P_2(n, t(n))$ — *стандартный невырожденный класс ФАЛ, и выполнено асимптотическое равенство* $\mathcal{L}^{\mathrm{C}}(Q(n)) \sim \frac{t}{\log t}$.

Замечание. Аналогично доказывается стандартность класса $Q(n) = P_2(n, t(n))$ относительно функционала "обычной" сложности и классов схем $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$, $\mathcal{U}^{\mathrm{ИКС}}$, $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$. Аналогичные утверждения справедливы и для классов операторов вида $(P_2(n, t(n)))^m$.

Рассмотрим теперь следующие операции над ФАЛ:

1. Добавление и изъятие фиктивных БП (переход к равной ФАЛ).

2. Переименование БП *без отождествления* (переход к конгруэнтной ФАЛ).

3. Подстановка констант 0, 1 вместо БП (переход к подфункции).

Множество $Q \subseteq P_2$ называется *инвариантным классом ФАЛ*, если оно замкнуто относительно трёх указанных операций. Если функция g получена из функции f применением операций 1–3, то говорят, что g является *квазиподфункцией* f, а f является *квазинадфункцией* g. Для множества функций F через $F^{\rceil}$ и $F_{\rfloor}$ будем обозначать множества всех квазинадфункций и квазиподфункций для функций из F соответственно.

Множества $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$ называются *тривиальными инвариантными классами.* Если инвариантный класс Q не является тривиальным, то $Q \supseteq \{0, 1\}$, поскольку Q содержит неконстантую функцию, из которой при помощи операции 3 можно получить обе константы. Отметим, что если класс Q замкнут по суперпозиции и $\{0, 1\} \subseteq Q$, то класс Q является инвариантным. Примерами инвариантных классов могут, следовательно, служить классы M и L всех монотонных и всех линейных ФАЛ соответственно. При этом класс самодвойственных функций, а также классы T_0, T_1 не являются инвариантными (не замкнуты относительно операции 3). Класс всех симметрических ФАЛ не замкнут относительно операции 1, поэтому также не является инвариантным. При этом инвариантным является класс $\hat{S}$ *квазисимметрических* ФАЛ, т. е. функций, симметрических по всем своим существенным переменным.

Утверждение 5. *Пусть* Q — *инвариантный класс ФАЛ. Тогда существует предел*

$$\sigma_Q = \lim_{n\to\infty} \sigma_Q(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |Q(n)|}{2^n}.$$

При этом число σ_Q, *называемое* характеристикой *класса* Q, *удовлетворяет неравенству* $0 \leqslant \sigma_Q \leqslant 1$.

Доказательство. Для каждого n выполнено неравенство $0 \leqslant \sigma_Q(n) \leqslant 1$, то есть последовательность $\sigma_Q(n)$ ограничена. Покажем, что она монотонно невозрастает,

откуда будет следовать её сходимость. В силу инвариантности класса Q, всякую функцию f из множества $Q(n+1)$ можно представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \overline{x}_{n+1} \underbrace{f(x_1, \ldots, x_n, 0)}_{\in Q(n)} \vee \overline{x}_{n+1} \underbrace{f(x_1, \ldots, x_n, 1)}_{\in Q(n)}$$

Отсюда сразу вытекает неравенство $|Q(n+1)| \leqslant |Q(n)|^2 \Rightarrow \frac{\log|Q(n+1)|}{2^{n+1}} \leqslant \frac{\log|Q(n)|}{2^n}$, что и требовалось. Неравенство $0 \leqslant \sigma_Q \leqslant 1$ следует из ограничений $0 \leqslant \sigma_Q(n) \leqslant 1$. $\square$

Инвариантные классы с характеристикой $\sigma_Q = 0$ называются *нулевыми*. Покажем, что инвариантный класс с характеристикой $\sigma_Q = 1$ есть только один — это класс P_2. Действительно, если инвариантный класс Q не совпадает с P_2, то для некоторого m будет выполнено неравенство $|Q(m)| < |P_2(m)|$, откуда следует, что $\sigma_Q(m) < 1$. Но последовательность $\sigma_Q(m)$, $\sigma_Q(m+1)$, $\ldots$ монотонно невозрастает, а значит для предела σ_Q будет выполнено неравенство $\sigma_Q \leqslant \sigma_Q(m) < 1$.

Найдём значение характеристик инвариантных классов M, L и $\hat{S}$. Имеем

$$\log|M(n)| \sim \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} \sim \frac{2^n}{\sqrt{2\pi n}},$$

откуда $\sigma_M(n) \to 0$ и следовательно $\sigma_M = 0$. Для класса линейных функций имеем $|L(n)| = 2^{n+1}$, и значит $\sigma_L = 0$. Всякую функцию из множества $\hat{S}(n)$ можно получить так: сначала выбираем k переменных, по которым функция будет существенной, а затем не более чем 2^{k+1} способами определяем значение функции на каждом слое куба B^k (в пределах одного слоя значение функции одно и то же). Отсюда следует, что

$$|\hat{S}(n)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{k+1} = 2 \cdot 3^n,$$

и поэтому $\sigma_{\hat{S}} = 0$. Таким образом, все три класса M, L, $\hat{S}$ являются нулевыми. Существуют и ненулевые инвариантные классы, отличные от P_2. Например, множество $Q = P_2 \setminus \left(\{x_1 \vee x_2\}^{\rceil}\right)$ является инвариантным классом с характеристикой $0 < \sigma_Q < 1$ (упражнение). Выше было установлено, что существует единственный инвариантный класс с характеристикой 1. Можно доказать, что при при любом $\sigma, 0 \leqslant \sigma < 1$ существует континуум инвариантных классов с характеристикой σ. Докажем это в частном случае $\sigma = 0$:

Утверждение 6. *Существует континуум различных инвариантных классов с характеристикой* 0.

Доказательство. Отметим, что число различных инвариантных классов не может быть больше континуума, поскольку множество P_2 счётно.

Рассмотрим симметрические функции $\hat{s}^{\{0,m\}}$, определяемые при $m > 1$ следующим образом:

$$\hat{s}^{\{0,m\}}(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_m \vee \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_m.$$

Заметим, что при $\hat{s}^{\{0,m'\}} \notin \{\hat{s}^{\{0,m''\}}\}_\rfloor$ при $m' \neq m''$. Отсюда следует, что для различных множеств $J \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$ соответствующие множества функций $Q_J = \{\hat{s}^{\{0,m\}} \mid m \in J\}_\rfloor$ будут различны. Каждое из таких множеств будет инвариантным классом. Из того, что класс $\hat{S}$ содержит в качестве подмножества каждое из множеств Q_J и имеет характеристику 0 будет следовать, что сами классы Q_J имеют характеристику 0. Классов Q_J будет столько же, сколько подмножеств множества $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, то есть континуум. □

Множество F называется *базовым множеством* инвариантного класса Q, если $F_\rfloor = Q$. Базовое множество класса Q называется *базой*, если любое его собственное подмножество уже не является базовым множеством для Q. Существуют инвариантные классы, не имеющие базы. Например, класс, состоящий из констант $0, 1$ и всех монотонных элементарных дизъюнкций (функций вида $x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_s}$), имеет счётное базовое множество, но не имеет базы.

Для задания всякого инвариантного класса достаточно задать, таким образом, его базовое множество. Существует и другой способ задания инвариантных классов. Пусть Q — нетривиальный инвариантный класс. Функция $g \in P_2$ называется *порождающим элементом* класса Q тогда и только тогда, когда $g \notin Q$, а все собственные подфункции g принадлежат Q (под собственной подфункцией функции g понимается произвольная подфункция g, не совпадающая g). Из определения следует, что порождающий элемент нетривиального инвариантного класса является существенной функцией, и никакие два различных порождающих элемента не являются квазиподфункциями друг друга. Приведём примеры порождающих элементов. Для класса M монотонных ФАЛ порождающий элемент единственный — это функция $\overline{x}_1$. Множество порождающих элементов класса, состоящего из констант и монотонных элементарных дизъюнкций, суть $\overline{x}_1$, x_1x_2. Для инвариантного класса Q *порождающим множеством* называется всякое максимальное по включению множество попарно не конгруэнтных порождающих элементов Q. Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7. *Пусть Q — инвариантный класс, G — его порождающее множество. Тогда $Q = P_2 \setminus (G^\rceil)$.*

Следствие. *Пусть множество G состоит из ФАЛ, не являющихся квазиподфункциями друг друга. Тогда $P_2 \setminus (G^\rceil)$ — инвариантный класс с порождающим множеством G.*

§5 Принцип локального кодирования и примеры его применения. Синтез схем для не всюду определённых ФАЛ.

Утверждение 8. *Для всякого инвариантного класса Q*

1. $L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \sim \sigma_Q \frac{2^n}{n}$ *при* $\sigma_Q > 0$,
2. $L^{\mathrm{C}}(Q(n)) = o(\sigma_Q \frac{2^n}{n})$ *при* $\sigma_Q = 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\sigma_Q > 0$. Докажем сначала нижнюю оценку. Имеем

$$\mathcal{J}(Q(n)) = \frac{\log|Q(n)|}{\log\log|Q(n)|} = \frac{\sigma_Q(n)\cdot 2^n}{\log(\sigma_Q(n)\cdot 2^n)} \sim \sigma_Q \frac{2^n}{n},$$

откуда по утверждению 3 следует оценка $L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \gtrsim \sigma_Q \frac{2^n}{n}$.

Перейдём к верхней оценке. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in Q(n)$, и q — натуральное число, $q \leqslant n$. Для всякого набора $\sigma'' \in B^q$ подфункция $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ принадлежит множеству $Q(q)$. Положим $\lambda = \lceil \log|Q(q)| \rceil$ и пусть π — произвольное инъективное отображение ("кодирование") множества $Q(q)$ во множество B^λ. Представим функцию f в виде $f(\sigma', \sigma'') = h(\sigma', \pi(f_{\sigma''}(x')))$. Схема для функции f строится в два этапа: сначала по набору σ'' строится код подфункции $f_{\sigma''}(x')$, а затем по этому коду и набору σ' однозначно восстанавливается значение f на наборе $(\sigma'\sigma'')$. Кодирование π — это система из λ булевых функций, каждая из которых представляет один бит кода и зависит от $n-q$ переменных. Систему функций π можно реализовать по асимптотически наилучшему методу синтеза схемой Σ_π со сложностью $\lesssim \lambda \frac{2^{n-q}}{n-q}$. Функция h зависит от $q+\lambda$ переменных, и её можно реализовать по асимптотически наилучшему методу синтеза схемой Σ_h со сложностью $\lesssim \frac{2^{q+\lambda}}{q+\lambda}$. Полагая $q = \lceil \log n \rceil$, и учитывая, что $\lambda \leqslant \sigma_Q(q) 2^q + 1 \lesssim \sigma_Q 2^q$, получаем

$$L(\Sigma_\pi) = o\left(\frac{2^n}{n}\right), \quad L(\Sigma_h) \lesssim \sigma_Q 2^q \frac{2^{n-q}}{n-q} \lesssim \sigma_Q \frac{2^n}{n}.$$

В случае $\sigma_Q > 0$ отсюда, с учётом нижней оценки, следует первая часть доказываемого утверждения. При $\sigma_Q = 0$ последовательность $\sigma_Q(q)$ стремится к нулю, откуда $L(\Sigma_h) = o(\frac{2^n}{n})$, что доказывает вторую часть утвеждения. □

При доказательстве верхней оценки утверждения 8 мы фактически использовали приём, называемый *принципом локального кодирования*, предложенный О. Б. Лупановым. Принцип локального кодирования состоит в следующем. Пусть Q — класс операторов, и пусть для каждого n определено кодирование π, ставящее в соответствие оператору $F \in Q(n)$ двоичный набор (код) длины $d = d(n)$, разбитый на "куски" длины $\leqslant \lambda = \lambda(n)$. Пусть кодирование обладает свойством "локальности": для вычисления значения оператора F на произвольном фиксированном наборе σ достаточно знать лишь один кусок кода, задаваемый своими координатами (например, позицией в коде и длиной). Пусть также кодирование и

декодирование “просты”: по набору σ можно эффективно определять кусок кода, требущийся для вычисления $F(\sigma)$, и производить это вычисление. Тогда можно эффективно реализовать оператор F.

В доказательстве утверждения 8 кодом функции мы считали совокупность кодов подфункций $f(x', \sigma'')$, а координатой куска кода служил набор σ''.

Утверждение 9. *Если выполнены следующие условия:*

1) *общая длина кода асимптотически равна* $\log|Q(n)|$, *то есть кодирование асимптотически неизбыточно,*

2) *сложность получения координат куска кода по набору* σ *равна* $o(\mathcal{J}(Q(n)))$,

3) *сложность вычисления куска кода по его координатам не превосходит асимптотически* $\mathcal{J}(Q(n))$,

4) *сложность вычисления оператора* $F \in Q(n)$ *по куску кода и набору* σ *равна* $o(\mathcal{J}(Q(n)))$,

то $L(Q(n)) \sim \mathcal{J}(Q(n))$.

Не всюду определённой ФАЛ называется отображение $f : B^n \to \{0, 1, *\}$. При этом если $f(\alpha) = *$, то говорят, что функция f *не определена* на наборе α. Множество $\{\alpha \in B^n \mid f(\alpha) \in \{0, 1\}\}$ называется *областью определённости* функции f и обозначается $\delta(f)$. Множество всех не всюду определённых ФАЛ от n переменных обозначается $\hat{P}_2(n)$. *Доопределением* функции $f \in \hat{P}_2(n)$ называется всякая функция $g \in P_2(n)$, совпадающая с f на множестве $\delta(f)$. Под сложностью не всюду определённой ФАЛ понимается наименьшая из сложностей её доопределений:

$$L^{\mathrm{C}}(f) = \min_{g-\text{ доопред. } f} L^{\mathrm{C}}(g).$$

Введём класс не всюду определённых ФАЛ с фиксированной мощностью области определённости:

$$\hat{P}_2(n, t) = \{f \in \hat{P}_2(n) \mid |\delta(f)| = t\}.$$

Функция Шеннона для этого класса определяется стандартным образом:

$$L^{\mathrm{C}}(\hat{P}_2(n, t)) = \max_{f \in \hat{P}_2(n,t)} L^{\mathrm{C}}(f). \qquad (t = t(n))$$

Утверждение 10. *Пусть* $t(n) \gg n \log n$. *Тогда* $L^{\mathrm{C}}(\hat{P}_2(n, t(n))) \sim \frac{t(n)}{\log t(n)}$.

Доказательство. Нижняя оценка. Рассмотрим множество $\check{P}_2(n, t) = \{f \in \hat{P}_2(n, t) \mid \delta(f) = [0, t)\}$. Для каждой из 2^t функций из $\check{P}_2(n, t)$ выберем одно доопределение с минимальной сложностью, и множество этих доопределений обозначим Q ($|Q| = 2^t$). Пользуясь стандартным мощностным методом получения нижних

оценок можно показать, что найдётся хотя бы одна ФАЛ из Q сложности $\gtrsim \frac{t}{\log t}$, а значит

$$L^{\mathrm{C}}(\hat{P}(n,t)) \geqslant L^{\mathrm{C}}(\check{P}_2(n,t)) \gtrsim \frac{t(n)}{\log t(n)}.$$

Верхняя оценка. Пусть $f \in \hat{P}_2(n,t)$. Разложим f по БП $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$:

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') f_{\sigma''}(x'),$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_q)$. В указанном разложении $f_{\sigma''}(x') \in \hat{P}_2(x', t_{\sigma''})$, причём $\sum_{\sigma''} t_{\sigma''} = t$. Пусть $G \subseteq P_2(x')$ — множество ФАЛ, являющихся доопределениями функций из $\hat{P}_2(x')$, которые равны нулю вне некоторого отрезка B^q и обращаются в $\{0,1\}$ на μ наборах этого отрезка, построенное проектированием множества $\mathfrak{A}_{m,\mu}$ на всевозможные отрезки длины m, $m = \mu, \mu+1, \ldots$. Тогда $|G| \leqslant 2^{2q} 2^q 2^\mu = 2^{3q+\mu}$, поэтому $L(G) \leqslant 2^{4q+\mu}$. Разобьём куб B^q на отрезки $I_1, \ldots, I_p$ и представим ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в виде $f^{(1)}_{\sigma''} \vee \ldots \vee f^{(p)}_{\sigma''}$, где $f^{(i)}_{\sigma''}$ обращается в 0 вне отрезка I_i, причём $|\delta(f^{(i)}_{\sigma''})| = \mu$ при $1 \leqslant i \leqslant p-1$ и $|\delta(f^{(p)}_{\sigma''})| \leqslant \mu$, а $p = p_{\sigma''} = \lceil |\delta(f_{\sigma''})|/\mu \rceil$. Пусть, далее, $g^{(i)}_{\sigma''}$ из $f^{(i)}_{\sigma''}$ из G и $g_{\sigma''} = g^{(1)}_{\sigma''} \vee \ldots \vee g^{(p)}_{\sigma''}$ — доопределение $f_{\sigma''}$. Тогда $g = \bigvee_{\sigma''} K_{\sigma''} g_{\sigma''}$ — доопределение f, при этом $L(g) \leqslant 2^{4q+\mu} + \frac{t}{\mu} + O(2^{n-q})$. При $q = \lceil n - \log t + 2\log n$, $\mu = \lceil \log t - 4q - 2\log n \rceil$ получаем $L(g) \lesssim \frac{t}{\log t}$, что и требовалось. □

Замечание. При $\frac{t}{\log t} \gg n$ выполнено асимптотическое равенство $\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(\hat{P}_2(n,t) \sim \rho_{\mathrm{Б}} \frac{t}{\log t}$.

Замечание. При построении оптимальной схемы для не всюду определённой функции $f \in \hat{P}_2(n,t)$ в общем случае невыгодно доопределять её нулём всюду на множестве $B^n \setminus \delta(f)$. Для “типичной” ФАЛ из $\hat{P}_2(n)$ имеем $|f^{-1}(0)| \sim |f^{-1}(1)| \sim |f^{-1}(*)| \sim 2^n/3$. Доопределяя функции из $\hat{P}_2(n,t)$ нулём, получим множество $Q(n)$ всюду определённых функций, причём

$$\log |Q(n)| \sim \log \binom{2^n}{2^n/3} \sim 2^n \left(\frac{\log 3}{3} + \frac{2}{3} \log \frac{3}{2}\right) = 2^n \cdot \log \frac{3}{\sqrt[3]{4}} > 2^n \cdot \frac{2}{3},$$

откуда $L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \gtrsim \frac{2}{3} \cdot \frac{2^n}{n}$, в то время как $L^{\mathrm{C}}(\hat{P}_2(n, \lceil 2^n/3 \rceil)) \sim \frac{1}{3} 2^n$.

Глава 2

Синтез схем для индивидуальных функций и оценки их сложности

§1 Средняя проводимость схемы. Асимптотика контактной сложности универсальных систем функций

Использование так называемой средней проводимости контактов схемы позволяет в некоторых случаях получать более высокие по сравнению с леммой 2.3 [2, глава 4] нижние оценки сложности реализации систем ФАЛ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$. Этот метод уже применялся, по существу, при доказательстве минимальности контактного дерева в классе разделительных КС (см. лемму 2.5 [2, глава 4]).

Будем называть множество δ, $\delta \subseteq B^n$, *равномерным*, если для каждого i, $i \in [1, n]$ число тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из δ, у которых $\alpha_i = 1$, равно $\frac{|\delta|}{2}$. Заметим, что каждый контакт КС $\Sigma = \Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ проводит (не проводит) ровно на половине всех наборов равномерного множества δ, $\delta \subseteq B^n$, и, следовательно, в обозначениях §§1,5 [2, глава 2] выполняются равенства

$$\frac{1}{|\delta|} \sum_{\alpha \in \delta} |E(\Sigma|_\alpha)| = \frac{1}{|\delta|} \sum_{\alpha \in \delta} |E(\Sigma|_{\overline{\alpha}})| = \frac{1}{2} L(\Sigma) \tag{1.1}$$

которые и задают "среднюю" проводимость (непроводимость) контактов Σ на наборах множества δ. В качестве множества δ мы, чаще всего, будем выбирать весь единичный куб B^n , а для получения нижних оценок сумм (1.1) — использовать неравенства

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geqslant |V(\Sigma)| - |c(\Sigma|_\alpha)| \tag{1.2}$$

$$|E(\Sigma|_{\overline{\alpha}})| \geqslant |c(\Sigma|_\alpha)| - |C(\Sigma)|, \tag{1.3}$$

которые вытекают из неравенства (1.2) [2, глава 2]. Напомним, что в [2, глава 4] было доказано следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных и отличных от констант ФАЛ от БП $X(n)$, то*

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant 2^{1-n} \sum_{j=1}^{m} \left| N_{f_j} \right|.$$

Следствие 1. $L^{\mathrm{K}}(J_n) \geqslant 2^{n+1} - 2$

Следствие 2. *Оценки следствия 1 и леммы 7.3 из [2, глава 4] дают асимптотическое равенство*

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^{n+1}$$

Теорема 1.1. *Для любого множества ФАЛ Q, $Q \subseteq P_2(n)$, и любого натурального r, $r \leqslant n$, справедливо неравенство*

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}) \geqslant 2\,|Q| \left(1 - \frac{5}{\sqrt{r}}\right) - 2\left|\widehat{Q}\right|, \tag{1.4}$$

где множество $\widehat{Q}$ состоит из тех ФАЛ f, $f \in Q$, у которых во множестве $\overline{N}_f$ есть грани размерности больше, чем $(n-r)$.

Доказательство. Пусть Σ - минимальная приведенная $(1, |Q|)$-КС, реализующая систему ФАЛ $\overrightarrow{Q}$, и пусть V - множество её выходных вершин. Пусть, далее, s и t - натуральные параметры, для которых $(s-1)(t-1) \leqslant r$, а V' - множество тех выходных вершин Σ, степень которых не меньше, чем s. Достаточно рассмотреть случай, когда

$$\left|V'\right| \leqslant 4\frac{|Q|}{s}, \tag{1.5}$$

так как иначе число контактов Σ инцидентных вершинам из V' уже было бы не меньше, чем $2\,|Q|$.

Для произвольного набора α, $\alpha \in B^n$, множество $c\,(\alpha)$ связанных компонент сети $\Sigma|_\alpha$ разобьем на непересекающиеся подмножества $c_i\,(\alpha)$, $i \in [1,4]$, так, что связная компонента G, $G \in c\,(\alpha)$, входит в подмножество:

1. $c_1\,(\alpha)$, если $V\,(G) \nsubseteq V$;
2. $c_2\,(\alpha)$, если $G \notin c_1\,(\alpha)$ и $V\,(G) \cap V' \neq \varnothing$;
3. $c_3\,(\alpha)$, если $G \notin (c_1\,(\alpha) \cup c_2\,(\alpha))$ и $|V\,(G)| \geqslant t$;
4. $c_4\,(\alpha)$ в остальных случаях.

Заметим, что произвольная связная компонента G из $c_i\,(\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$|E\,(G)| \geqslant |V \cap V\,(G)|\,, \tag{1.6}$$

если $i = 1$ и состоит только из выходных вершин Σ в остальных случаях. При этом в случае $i = 2$ она содержит хотя бы одну вершину из V', в случае $i = 3$ - состоит не менее, чем из t вершин, а в случае $i = 4$ включает в себя не более $(t-1)$ вершин, которые отделяются от остальных вершин сети $\Sigma|_\alpha$ сечением, состоящим не более, чем из $(s-1)(t-1) \leqslant r$, контактов множества $E\,(\Sigma|_{\overline{\alpha}})$. Таким образом, в каждой

вершине компоненты G из множества $c_4(\alpha)$ реализуется ФАЛ из множества $\widehat{Q}$, и, учитывая все вышесказанное, получим

$$|c_2(\alpha)| \leqslant \left|V'\right|, \ |c_3(\alpha)| \leqslant \frac{|Q|}{t}, \ |c_4(\alpha)| \leqslant \left|\widehat{Q}\right|. \tag{1.7}$$

Из (1.5) – (1.7) в силу (1.2) вытекает неравенство

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geqslant |Q| - \frac{4|Q|}{s} - \frac{|Q|}{t} - \left|\widehat{Q}\right|,$$

из которого в соответсвии с 1.1 при $\delta = B^n$ и $s = t = \lceil\sqrt{r}\rceil$ следует (1.4).

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Полагая $Q = P_2(n)$ и учитывая то, что при $r = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ множество $\widehat{Q} = \widehat{P}_2(n)$ удовлетворяет соотношению $\left|\widehat{P}_2(n)\right| = o\left(\frac{2^{2^n}}{\sqrt{n}}\right)$, получим*

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{P}_2(n)) \geqslant 2 \cdot 2^{2^n}\left(1 - O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Следствие 2. *Оценки следствия 1 и леммы 3.1 из[2, глава 4] дают асимптотическое неравенство*

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{P}_2(n)) \sim 2 \cdot 2^{2^n}.$$

§2 Забивание переменных константами и незабиваемые множества переменных. Асимптотика сложности мультиплексора в некоторых классах схем

Определим сначала операцию подстановки констант вместо переменных в функции и схемы. Будем считать, что любая ЭК K ранга r от БП $X(n)$ вида $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$ задает подстановку констант $x_{i_1} = \sigma_1, \dots, x_{i_r} = \sigma_r$. Результат применения указанной подстановки к системе ФАЛ $F, F \in P_2^m(n)$, и схеме Σ от БП $X(n)$ будем обозначать через $F|_K$ и $\Sigma|_K$ соответственно. При этом система ФАЛ $F|_K$ определяется обычным образом, а преобразование схемы Σ в схему $\Sigma|_K$ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}(\mathcal{U}^{\mathrm{K}})$ связано с заменой вершин x_{i_j}, $j = 1, \dots, r$, константой σ_j и применением, до тех пор, пока это возможно, тождеств подстановки констант из §§1–2 [2, глава 3] (соответственно отождествлением концевых вершин контактов вида $x_{i_j}^{\sigma_j}$ и удалением контактов вида $x_{i_j}^{\overline{\sigma}_j}$, $j = 1, \dots, r$) с последующим переходом к эквивалентной приведенной схеме. Заметим, что

$$K \cdot f = K \cdot f|_K$$

для любой ФАЛ f и что схема $\Sigma|_K$ реализует систему ФАЛ $F|_K$, если схема Σ реализует систему ФАЛ F. Заметим также, что для КС Σ от БП $X(n)$ и набора

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ схема $\Sigma|_{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}$ в отличие от сети $\Sigma|_\alpha$ (см. §§1,5 из [2, глава 2]) состоит из (кратных) изолированных полюсов.

Будем говорить, что подмножество U множества X, состоящего из всех БП ФАЛ f, *забивает* БП x, $x \in X \setminus U$, этой ФАЛ, если существует ЭК K от БП U такая, что ФАЛ $f|_K$ не зависит существенно от x. При этом будем считать, по определению, что пустое множество $U = \emptyset$ забивает любую несущественную БП ФАЛ f и не забивает ее существенные БП. Непустое подмножество Y множества БП ФАЛ f называется *незабиваемым множеством переменных* этой ФАЛ, если для любой БП y, $y \in Y$, множество $Y \setminus \{y\}$ не забивает y. Заметим, что если Y — незабиваемое множество БП ФАЛ f, то:

1. любая БП из Y является существенной БП ФАЛ f;

2. для любой ЭК K от БП Y множество ее несущественных БП является незабиваемым множеством БП ФАЛ $f|_K$. Заметим также, что примером незабиваемого множества БП является множество всех существенных(информационных) БП линейной(соответственно мультиплексорной) ФАЛ.

Теорема 2.1. *Если ФАЛ f имеет незабиваемое множество, состоящее из n ее БП, то*

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant 2n - 2, \quad L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant 2n - 1 \tag{2.1}$$

Доказательство. Первое из равенств (2.1) докажем индукцией по n, $n = 1, 2, \ldots$. При $n = 1$ это неравенство, очевидно, выполняется. Пусть оно верно для любой ФАЛ f', которая имеет незабиваемое множество, состоящее из n', $n' \leqslant (n-1)$, ее БП, и пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — незабиваемое множество БП ФАЛ f, где $n \geqslant 2$.

Возьмем миниимальную приведенную СФЭ Σ в базисе Б_0, которая реализует ФАЛ f со сложностью $L^{\mathrm{C}}(f)$. В силу существенной зависимости ФАЛ f от БП y_1 в СФЭ имеется цепь из последовательно соединенных вершин $v_1, \ldots, v_t$, где v_1 — вход y_1 СФЭ Σ, а v_t — выход Σ. При этом в вершине v_1 реализуется ФАЛ y_1 и, так как $f \neq y_1$, то, следовательно, $t \geqslant 2$. Для $\sigma_1 \in B$ и $\sigma_1 = 0$ тогда и только тогда, когда вершина v_2 связана с ФЭ &, рассмотрим СФЭ $\Sigma' = \Sigma|_{y_1^{\sigma_1}}$ и реализуемую ею ФАЛ $f' = f|_{y_1^{\sigma_1}}$, которая имеет незабиваемое множество БП $Y' = Y \setminus \{y_1\}$ и поэтому отлична от констант.

Заметим, что в вершинах v_1 и v_2 СФЭ Σ при $y_1 = \sigma_1$ реализуются константы σ_1 и σ_2 соответственно, а так как $f' \neq \sigma_2$, то значит $t \geqslant 3$. При этом константа σ_2 из вершины v_2 поступает на вход ФЭ вершины v_3 и, следовательно, при переходе от СФЭ Σ к СФЭ Σ' элементы, связанные с вершинами v_2 и v_3 будут устранены("забиты"). Таким образом, выполняются неравенства

$$L^{\mathrm{C}}(f) = L(\Sigma) \geqslant L(\Sigma') + 2 \geqslant L^{\mathrm{C}}(f') + 2,$$

которые устанавливают справедливость рассматриваемого индуктивного перехода и доказывают первое из равенств (2.1).

Докажем теперь второе из равенств (2.1). Пусть, по-прежнему, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — незабиваемое множество БП ФАЛ f и пусть Σ — минимальная приведенная $(1,1)$-КС, реализующая ФАЛ f со сложностью $L(\Sigma) = L^{\mathrm{K}}(f)$. Если каждая из БП y_i, $i \in [1,n]$ имеет в КС Σ не менее двух контактов, то второе неравенство (2.1), очевидно, выполняется. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда множество Y', состоящее из тех БП y_i, $i \in [1,n]$, которым в Σ соответствует ровно один контакт, не пусто. Пусть, для определенности, $Y' = \{y_1, \ldots, y_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, и пусть каждая из БП y_i, $i \in [1,m]$, имеет в Σ только один замыкающий контакт(это предположение не ограничивает, очевидно, общности рассуждений).

Рассмотрим КС $\Sigma' = \Sigma|_{\overline{y}_{m+1}\cdot\ldots\cdot\overline{y}_n}$, которая реализует ФАЛ $f' = f|_{\overline{y}_{m+1}\cdot\ldots\cdot\overline{y}_n}$ с незабиваемым множеством БП Y' и для которой в силу выбора Y' выполняется неравенство

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) - 2(n-m). \tag{2.2}$$

Схема Σ' по построению является связным графом и для каждого i, $i \in [1,m]$, содержит ровно один(замыкающий) контакт БП y_i. Пусть, далее, КС Σ'' является остовной подсхемой КС Σ', содержащей все контакты БП Y' и только их, а остовная подсхема $\overline{\Sigma}''$ схемы Σ' служит дополнением Σ'', то есть $\overline{\Sigma}'' = \Sigma' \setminus \Sigma''$.

Покажем, что в КС Σ'' нет циклов, то есть Σ'' представляет собой систему деревьев, и что $|c(\overline{\Sigma}'')| \leqslant 2$. Действительно, если бы в КС Σ'' контакт БП y', $y' \in Y'$, принадлежал циклу, то множество БП $Y' \setminus \{y'\}$ при подстановке константы 1 забивало бы БП y' в КС Σ', что противоречит незабиваемости множества БП Y' ФАЛ f'. Аналогичное противоречие в случае $|c(\overline{\Sigma}'')| \geqslant 3$ связано с тем, что при этом в Σ' найдется контакт БП y', $y' \in Y'$, соединяющий между собой две различные компоненты $\overline{\Sigma}''$, одна из которых не содержит полюсов Σ, и, следовательно, множество БП $Y' \setminus \{y'\}$ вновь забивает БП y' при подстановке константы 0.

Учитывая установленные свойства схем Σ'' и $\overline{\Sigma}''$, а также соотношения (1.2) и (1.3) из [2, глава 2], получим:

$$L(\overline{\Sigma}'') + 2 \geqslant |V(\overline{\Sigma}'')| = |V(\Sigma')| = |V(\Sigma'')| \geqslant m+1.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$L(\Sigma') = L(\overline{\Sigma}'') + m \geqslant 2m - 1,$$

из которого, в силу (2.2) вытекает второе неравенство (2.1). Теорема доказана. □

Следствие.

$$L^{\mathrm{C}(\mu_n)} \geqslant 2^{n+1} - 2,\ L^{\mathrm{K}}(\mu_n) \geqslant 2^{n+1} - 1.$$

Установим теперь верхние оценки сложности реализации мультиплексорной ФАЛ μ_n в классах схем $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, $\mathcal{U}^{\Phi}$, $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$, $\mathcal{U}^{\overrightarrow{\mathrm{K}}}$.

Теорема 2.2. *Для $n = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства:*

$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \leqslant L^{\Phi}(\mu_n) \leqslant 2^{n+1} + O(2^{n/2}) \tag{2.3}$$

$$L^{\mathrm{K}}(\mu_n) \leqslant 2^{n+1} + O(2^n/\sqrt{n}) \tag{2.4}$$

$$L^{\overrightarrow{\mathrm{K}}}(\mu_n) \leqslant 2^n + O(2^{n/2}) \tag{2.5}$$

Доказательство. Построим в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$ схемный мультиплексор Σ_n порядка n, сложность которого дает оценку (2.3) для $L^{\mathrm{C}}(\mu_n)$, следующим образом:

1. разобьем набор БП $X(n)$ на группы $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, где $q = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, а набор БП $y = (y_0, \ldots, y_{2^n-1})$ — на 2^q последовательных наборов $y^{(0)}, \ldots, y^{(2^q-1)}$ длины 2^{n-q} каждый;

2. возьмем дешифраторы Σ' и Σ'' от БП x' и x'' порядка q и $n-q$, построенные по лемме 2.1 из [2, глава 4];

3. построим схему $\widehat{\Sigma}''$, которая содержит дешифратор Σ'' в качестве подсхемы и для каждого σ'', $\sigma'' \in B^{n-q}$, на выходе z_j, где $j = \nu(\sigma'')$, реализует ФАЛ $\mu_{n-q}(x'', z^{(j)})$ по ее сокращенной ДНФ, используя для этого 2^{n-q} ФЭ & и $(2^{n-q} - 1)$ ФЭ $\vee$;

4. искомая схема Σ_n содержит СФЭ Σ' и $\widehat{\Sigma}''$ в качестве подсхем и реализует ФАЛ $\mu_n(x', x'', y) = \mu_q(x', z_0, \ldots, z_{2^q-1})$ на основе сокращенной ДНФ μ_q, используя для этого 2^q ФЭ & и $(2^q - 1)$ ФЭ $\vee$.

Оценка (2.4) достигается на контактном мультиплексоре $\widehat{\Sigma}_n$ порядка n, который получается в результате стыковки асимптотически наилучшего контактного дешифратора $\Sigma_n^{(\&)}$ порядка n (см. лемму 7.2 из [2, глава 4]) с $(2^n, 1)$-контактной звездой из 2^n контактов БП $y_0, \ldots, y_{2^n-1}$ (см. рис. 5.7 в [2, глава 2]).

Аналогичным образом можно построить π–схему $\widetilde{\Sigma}_n$, которая реализует ФАЛ μ_n со сложностью $L(\widetilde{\Sigma}_n) \sim 2^{n+1}$ и содержит $o(2^n)$ размыкающих контактов. Для этого достаточно (см. доказательство леммы 7.2 из [2, глава 4]) каждую из характеристических ФАЛ $\chi_1, \ldots, \chi_{2^p}$ реализовать соответствующей канонической π–схемой. Кроме того, для построения m–регулярного разбиения единичного куба от БП $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, на компонентах которого ЭК от БП x' моделируются, как правило, с помощью БП, а не их отрицаниями, достаточно использовать технику [11]. Искомая формула, удовлетворяющая (2.3), получается моделированием π–схемы $\widetilde{\Sigma}_n$.

Контактный мультиплексор $\check{\Sigma}$ порядка n из ориентированных контактов, сложность которого дает оценку (2.5) имеет вид $\check{\Sigma} = \Sigma''(\Sigma')$, где для $q = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ Σ' и Σ'' — $(1, 2^q)$– и $(2^{n-q}, 1)$–контактные деревья от БП $x' = (x_1, \ldots, x_q)$ и $x'' =$

$(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ соответственно, построенные из контактов, ориентированных от входов к выходам. При этом каждый выход $z_{\nu(\sigma')}$, где $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q) \in B^q$ КС Σ', на котором реализуется ЭК $K' = x_1^{\sigma_1} \ldots x_q^{\sigma_q}$, соединяется с каждым входом $u_{\nu(\sigma'')}$, где $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n) \in B^{n-q}$, КС Σ'', для которого функция проводимости от $u_{\nu(\sigma'')}$ к выходу Σ'' равна $K'' = x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \ldots x_n^{\sigma_n}$, контактом БП $y_{\nu(\sigma',\sigma'')}$, ориентированным по направлению от $z_{\nu(\sigma')}$ к $u_{\nu(\sigma'')}$. □

§3 Сложность линейной функции в классе схем из функциональных элементов

Те СФЭ из класса $\mathfrak{U}^{\mathrm{C}}$, которые реализуют линейные ФАЛ l_n или $\overline{l_n}$, будем называть *линейными схемами порядка* n. Положим

$$\mathfrak{L}(n) = \min\left\{L^{\mathrm{C}}(l_n),\ L^{\mathrm{C}}\left(\overline{l_n}\right)\right\},$$

а линейные СФЭ порядка n и сложности $\mathfrak{L}(n)$ будем называть *минимальными* линейными СФЭ. Из [2] (см. лемму 3.1 гл. 4) следует, что если $n \geqslant 2$, то

$$\mathfrak{L}(n) \leqslant \min\left\{L^{\mathrm{C}}(l_n),\ L^{\mathrm{C}}\left(\overline{l_n}\right)\right\} \leqslant 4n - 4, \tag{3.1}$$

а из теоремы 2.1 в силу незабиваемости множества всех БП линейной ФАЛ вытекает, что

$$\mathfrak{L}(n) \geqslant 2n - 2$$

Докажем, что верхняя оценка (3.1) дает точные значение сложностей $L^{\mathrm{C}}(l_n)$ и $L^{\mathrm{C}}\left(\overline{l_n}\right)$.

Лемма 3.1. *Пусть Σ — линейная СФЭ порядка n от БП $X(n)$ и пусть её БП x_i поступает только на вход ФЭ $\mathcal{E}$ СФЭ Σ, связанного с вершиной v. Тогда в случае $\mathcal{E} = \&(\mathcal{E} = \vee)$ на второй вход ФЭ $\mathcal{E}$ поступает ФАЛ 1 (соответственно 0), а в случае $\mathcal{E} = \neg$ СФЭ Σ', которая получается из Σ удалением $\mathcal{E}$ и объявлением v входной вершиной БП x_i, также является линейной СФЭ порядка n.*

Доказательство. Из свойств линейной ФАЛ следует, что СФЭ Σ' реализует отрицание той ФАЛ, которую реализует СФЭ Σ, и потому СФЭ Σ' тоже является линейной СФЭ порядка n.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ — двухвходовой ФЭ, который соответствует ФАЛ $\varphi(y_1, y_2)$, и пусть на второй вход $\mathcal{E}$ поступает дуга из вершины w. При этом ФАЛ g, которая реализуется в вершине w, не зависит, очевидно, от БП x_i. Предположим, что $g \not\equiv \overline{\sigma}$, где $\sigma = 0$ в случае $\varphi = y_1 \cdot y_2$ и $\sigma = 1$ в случае $\varphi = y_1 \vee y_2$, то есть $g|_K = \sigma$ для некоторой ЭК K вида $x_1^{\alpha_1} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Тогда в силу особенностей структуры СФЭ Σ и в силу тождества $\varphi(\sigma, x_i) = \sigma$ СФЭ $\Sigma|_K$ реализует константу, что противоречит линейности Σ.

Лемма доказана. □

Следствие 1. *Степень любого входа минимальной линейной СФЭ порядка n, $n \geqslant 2$, не меньше двух.*

Следствие 2. *Справедливы равенства*

$$\mathfrak{L}(2) = L^{\mathrm{C}}(l_2) = L^{\mathrm{C}}\left(\overline{l_2}\right) = 4. \tag{3.2}$$

Действительно, в соответствии со следствием 1 ранг любой линейной СФЭ порядка 2 не меньше четырех. Поэтому в силу того, что в Σ есть хотя бы один ФЭ $\neg$, справедливо неравенство $L(\Sigma) \geqslant 4$, из которого в соответствии с (3.1) вытекает (3.2).

Теорема 3.1. *Для любого натурального n, $n \geqslant 2$, выполняются равенства*

$$\mathfrak{L}(n) = L^{\mathrm{C}}(l_n) = L^{\mathrm{C}}\left(\overline{l_n}\right) = 4n - 4. \tag{3.3}$$

Доказательство. В силу (3.1) для доказательства (3.3) достаточно убедиться в том, что

$$\mathfrak{L}(n) \geqslant 4n - 4. \tag{3.4}$$

Установим справедливость (3.4) индукцией по $n, n = 2, 3, \ldots$.

При $n = 2$ неравенство (3.4) выполняется в силу (3.2), что составляет базис рассматриваемой индукции. Для обоснования индуктивного перехода возьмем произвольную минимальную линейную СФЭ Σ порядка n, $n \geqslant 3$, от БП $X(n)$ и покажем, что для некоторых i, $i \in [1,\ n]$, и σ, $\sigma \in B$, выполняется неравенство

$$L(\Sigma) \geqslant L\left(\Sigma|_{x_i^\sigma}\right) + 4. \tag{3.5}$$

Будем считать, что на каждом шаге преобразования СФЭ Σ в СФЭ $\Sigma''_{i,\sigma} = \Sigma|_{x_i^\sigma}$ удаляется один ФЭ $\mathcal{E}$ с константой на входе. При этом вершина, с которой связан ФЭ $\mathcal{E}$, обьявляется константной входной вершиной типа σ новой схемы, если на выходе $\mathcal{E}$ реализуется константа σ, $\sigma \in B$, и удаляется вместе с $\mathcal{E}$ в остальных случаях. Заметим, что для любой промежуточной схемы Σ' указанного преобразования выполняется неравенство

$$L\left(\Sigma''_{i,\sigma}\right) \leqslant L\left(\Sigma'\right) - IC\left(\Sigma'\right), \tag{3.6}$$

где $IC(\Sigma')$ — число дуг Σ', исходящих из её константных входов. Будем предполагать также, что в любой вершине СФЭ $\Sigma''_{i,\sigma}$ реализуется неконстантная ФАЛ.

Полустепень исхода, то есть число исходящих дуг вершины v СФЭ Σ будем обозначать через $d^+(v)$, а число исходящих из v дуг, которые ведут в вершины, связанные с ФЭ типа Φ, $\Phi \subseteq \text{Б}_0$, — через $d^+_\Phi(v)$. Заметим, что для любой вершины v СФЭ Σ и для любого любого i, $i \in [1\ ,n]$, выполняются неравенства

$$d^+_\neg(v) \leqslant 1,\ d^+(x_i) = d^+_\&(x_i) + d^+_\vee(x_i) + d^+_\neg(x_i) \geqslant 2, \tag{3.7}$$

первое из которых вытекает непосредственно из минимальности Σ, а второе — из следствия 1 леммы 3.1. Нетрудно убедиться в том, что неравенство (3.5) выполняется в следующих случаях:

1. $d^+(x_i) \geqslant 4$ — при любом σ;

2. $d^+_{\&}(x_i) \geqslant 2$ или $d^+_{\&}(x_i) = d^+_{\neg}(x_i) = 1$ — при $\sigma = 0$;

3. $d^+_{\vee}(x_i) \geqslant 2$ или $d^+_{\vee}(x_i) = d^+_{\neg}(x_i) = 1$ — при $\sigma = 1$;

Действительно, в каждом из этих случаев СФЭ Σ', которая получается при переходе от СФЭ Σ к СФЭ $\Sigma''_{i,\sigma}$ в результате удаления $d^+(x_i)$ ФЭ, связанных с входом x_i, имеет при $d^+(x_i) < 4$ не меньше, чем $(4 - d^+(x_i))$, константных входных дуг и, следовательно, в силу (3.6) выполняется (3.5).

Таким образом, с учетом (3.7) осталось рассмотреть основной случай — случай, когда $d^+_{\&}(x_i) = d^+_{\vee}(x_i) = 1$ и $d^+_{\neg}(x_i) = 0$ для каждого i, $i \in [1,\ n]$. В этом случае в СФЭ Σ найдутся два входа, связанные с одним и тем же ФЭ типа & или $\vee$. Пусть для определенности, данными входами Σ будут БП x_1 и x_2, котороые поступают на входы одного и того же ФЭ &, связанного с вершиной v. Пусть при этом вторая дуга, исходящая из вершины x_i, $i = 1, 2$, идет в вершину w_i, связанную с ФЭ $\vee$, на другой вход которого поступает дуга из вершины u_i. Заметим, что в силу минимальности Σ для любого i, $i = 1, 2$, вершина u_i отлична от вершины v, так как при $v = u_i$ в вершине w_i реализуется ФАЛ x_i.

Покажем, что в случае $w_1 \neq w_2$ неравенство (3.5) выполняется. Действительно,рассмотрим в этом случае СФЭ Σ', которая пролучается при переходе от СФЭ Σ к СФЭ $\Sigma''_{1,0}$ в результате удаления двух ФЭ, связанных с вершинами w_1 и v, а также одного ФЭ, связанного с какой-либо вершиной v', в котороую идет дуга из v. Так как $u_2 \neq v$ и, следовательно, $v' \neq w_2$, то вход x_2 схемы Σ' поступает только на вход ФЭ $\vee$, связанного с вершиной w_2. Из леммы 3.1 вытекает, что при этом в вершине u_2 СФЭ Σ' реализуется ФАЛ 0, то есть при переходе от Σ' к $\Sigma''_{1,0}$ ещё один ФЭ - ФЭ $\vee$, связанный с вершиной w_2, — будет удален. Неравенство (3.5) в случае $w_1 \neq w_2$ доказано.

Пусть, наконец, $w_1 = w_2$ и, следовательно, $x_1 = u_2$, $x_2 = u_1$ и пусть, для определенности, либо $d^+(v) \geqslant 2$, либо $d^+(v) = d^+(w) = 1$ и $d^+_{\&,\vee}(v) \geqslant d^+_{\vee,\neg}(w)$. Рассмотрим СФЭ Σ', которая получается при переходе от СФЭ Σ к СФЭ $\Sigma''_{1,0}$ в результате удаления двух ФЭ, связанных с вершинами v и w, а также всех тех ФЭ, входы коорых присоединены к v (число таких ФЭ равно $d^+(v)$). Заметим, что в случае $d^+(v) \geqslant 2$ неравенство (3.5) вытекает из неравенства $L(\Sigma) - L(\Sigma') \geqslant 4$, а в случае $d^+(v) = d^+_{\&,\vee}(v) = 1$ — из неравенства $L(\Sigma) = L(\Sigma') + 3$ и неравенства (3.6), где $IC(\Sigma) \geqslant 1$. В оставшемся случае $d^+(v) = d^+_{\vee}(v) = d^+(w) = d^+_{\&}(w) = 1$ из вершины $v(w)$ исходит единственная дуга, ведущая в вершину v' (соответственно w'), связанную с ФЭ $\vee$ (соответственно &). В этом случае СФЭ Σ' имеет в вершине w_2 вход x_2 степени 1, поступающий на вход ФЭ &, и, следовательно, в силу леммы 3.1 удовлетворяет неравенству $L(\Sigma') - L\left(\Sigma''_{1,0}\right) \geqslant 1$, из которого, с учетом равенства $L(\Sigma) - L(\Sigma') = 3$, вытекает (3.5).

Теорема доказана. □

§4 Сферические функции. Сложность линейной и других функций в классе контактных схем и самокорректирующихся контактных схем

Функцию f из $P_2(n)$ будем называть α - *сферической*, где $\alpha \in B^n$, если для любых наборов β и γ из B^n, отличающихся от α ровно в одном и ровно в двух разрядах соответственно, $f(\beta) = 0$ и $f(\gamma) = 1$. При этом $\tilde{0}$ - сферическую ФАЛ, будем называть просто сферической. Пусть s_n^i, где $0 \leqslant i \leqslant n$, — элементарная симметрическая ФАЛ с рабочим числом i, то есть ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, обращающаяся в 1 на всех тех наборах, которые содержат ровно i единиц. Заметим, что ФАЛ s_3^2 является сферической, а ФАЛ s_3^1 — $\tilde{1}$–сферической и что ФАЛ $\bar{l}_n$ (l_n) является α - сферической для всех наборов α из множества $B^n_{\text{чет.}}$ ($B^n_{\text{неч.}}$), содержащего все наборы B^n с четным (соответственно нечетным) числом единиц.

Наряду с КС из «обычных» (абсолютно надежных) контактов будем рассматривать КС из нанадежных контактов, которые могут выходить из строя в результате *обрыва*, когда ФАЛ проводимости контакта становится равной 0 или *замыкания*, когда эта ФАЛ становится равной 1. Будем говорить, что КС Σ *корректирует* p, $p \geqslant 0$ *обрывов и* q, $q \geqslant 0$ *замыканий, если она эквивалентна любой КС, получающейся из* Σ *в результате обрыва не более чем* p, *и замыкания не более чем* q *контактов.*

Лемма 4.1. *Если КС* Σ *реализует сферическую ФАЛ* f *из* $P_2(n)$, *то в* Σ *встречаются замыкающие контакты всех БП* $x_1, \ldots, x_n$, *причем контакты всех этих типов, за исключением, быть может, двух, встречаются в ней не менее двух раз.*

Доказательство. Из сферичности ФАЛ f следует, что она существенно зависит от всех своих БП и не является антимонотонной ни по одной из них. Следовательно, в Σ имеются замыкающие контакты всех БП $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через a_1 и a_2 полюса КС Σ, а через E_1 (E_2) - множество тех ее контактов, каждый из которых является первым (соответственно последним) замыкающим контактом для какой-либо проводящей цепи КС Σ идущей от a_1 к a_2.

Докажем, сначала, что $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Действительно, пусть $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ и поэтому в КС Σ имеется контакт K вида x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, который является первым (последним) замыкающим контактом проводящей цепи C_1 (соответственно C_2), идущей от a_1 к a_2. Для $j = 1, 2$ обозначим через C'_j и C''_j начальную (до контакта K) и заключительную (после контакта K) подцепи цепи C_j. Пусть, далее, цепь C состоит из начальной подцепи C'_1, контакта K и заключительной подцепи C''_2, если цепи C_1 и C_2 проходят контакт K в одном направлении и состоит из начальной подцепи C'_1, которя сразу переходит в заключительную подцепь C''_2 в противном случае. Заметим, что подцепи C'_1 и C''_2 по построению состоят только из размыкающих контактов, среди которых нет контактов вида $\bar{x}_i$ и поэтому цепь C будет проводить на

наборе $\beta = (\underbrace{0\ldots0}_{i}10\ldots0)$, что противоречит сферичности ФАЛ f.

Докажем теперь, что каждое из множеств E_s, $s = 1, 2$, содержит замыкающие контакты всех БП $x_1, \ldots, x_n$ за исключением, быть может, одной. Действительно, из сферичности ФАЛ f следует, что для любых i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, в КС Σ имеется цепь C, идущая из a_1 в a_2, которая проводит на наборе $\gamma = (\underbrace{0\ldots01}_{i}0\ldots0\underbrace{10\ldots0}_{n-j+1})$ и состоит из замыкающих контактов БП x_i, x_j, а также размыкающих контактов остальных БП. Заметим, что в C не могут отсутствовать замыкающие контакты ни одной из БП x_i, x_j, так как иначе ФАЛ f обращалась бы в 1 на некотором наборе β, содержащем ровно одну 1. Следовательно, первый из контактов вила x_i, x_j на цепи C войдет в E_1, а последний - в E_2 и поэтому как в E_1, так и в E_2 контакты вида x_i, x_j не могут отсутвствовать одновременно. Таким образом, во множестве $E_1 \cup E_2$ не могут отсутствовать замыкающие контакты трех и более БП.

Лемма доказана. □

Следствие 1. *Если КС Σ реализует α - сферическую ФАЛ f из $P_2(n)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то контакты всех типов $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$ встречаются в Σ по крайней мере $t = 1$ раз, причем контакты всех этих типов за исключением, быть может, двух встречаются в Σ не менее $r = 2$ раз.*

Следствие 2. *Если КС Σ корректирует p, $p \geqslant 0$ обрывов, то в условиях следствия 1 имеем $t \geqslant p + 1$ и $r \geqslant 2\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil$, то есть*

$$L(\Sigma) \geqslant 2(p+1) + 2\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil (n-1)$$

.

Теорема 4.1. *При любом натуральном n имеют место равенства*

$$L^K(s_n^1) = L^K(s_n^{n-1}) = 3n - 2,$$

а если $n \geqslant 2$, то

$$L^K(l_n) = L^K(\bar{l}_n) = 4n - 4. \tag{4.1}$$

Доказательство. Все необходимые верхние оценки могут быть получены с помощью метода каскадов (см., например, §3 из [2, гл. 4]).

Пусть КС Σ реализует ФАЛ $f = s_n^{n-1}$. Из того, что ФАЛ s_n^{n-1} не является ни монотонной ни антимонотонной ни по одной из своих БП, следует что в КС Σ встречаются константы всех типов $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Заметим, что при этом контакты всех типов $x_1, \ldots, x_n$ за исключением, быть может, двух встречаются в Σ не менее двух раз. Действительно, пусть, например, контакты типов x_1, x_2, x_3 встречаются в Σ только по одному разу. Тогда, подставив константу 1 вместо всех

БП $x_4, \ldots, x_n$, мы получим КС Σ', которая реализует сферическую ФАЛ s_3^2 и содержит только по одному замыкающему контакту своих БП, что противоречит лемме 4.1. Следовательно,

$$L(\Sigma) \geqslant 3n - 2.$$

Случай, когда КС Σ реализует ФАЛ $f = s_n^1$, сводится к рассмотренному случаю инвертированием БП.

Пусть теперь $n \geqslant 2$ и КС Σ реализует ФАЛ $f = l_n$. Из того, что ФАЛ f является α - сферической при любом α из $B_{\cdot}^n$, в силу (1.1) и следствия 1 из леммы 4.1 вытекает неравенство:

$$2^{n-2}L(\Sigma) \geqslant 2^{n-1}(2n-2),$$

из которого следует, что

$$L(\Sigma) \geqslant 4n - 4.$$

Случай, когда $f = \bar{l}_n$, рассматривается аналогично.

Теорема доказана. □

Для ФАЛ f и $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ определим «самокорректирующуюся» сложность $L^{\mathrm{K}}_{(p,q)}(f)$ как минимальную из сложностей тех КС, реализующих ФАЛ f, которые корректируют p обрывов и q замыканий.

Теорема 4.2. *При любых натуральных p и n, $n \geqslant 2$, имеют место равенства*

$$L^K_{(p,0)}(l_n) = 4(p+1) + 4\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil (n-2), \tag{4.2}$$

$$L^K_{(1,1)}(l_n) = 8n. \tag{4.3}$$

Доказательство. Нижняя оценка в (4.2) доказывается аналогично нижней оценке (4.1) с использованием следствия 2 леммы 4.1. Верхнюю оценку (4.2) в случае $p = 1$ дает схема из [18, гл. 3, §1], которая получается из КС, построенной для линейной ФАЛ по методу каскадов, добавлением 4 контактов. В общем случае $p \geqslant 1$ искомая КС представляет собой результат параллельного соединения $\lceil \lfloor p+1 \rfloor 2 \rceil$ указанных выше самокорректирующихся КС и $\left((p+1) - 2\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor\right)$ КС, построенных по методу каскадов.

Верхнюю оценку в (4.3) дает КС, которая получается в результате последовательного соединения двух упомянутых выше КС для линейной ФАЛ, корректирующих 1 обрыв. Для доказательства нижней оценки заметим, что в силу теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезев КС Σ, которая реализует ФАЛ f и корректирует p обрывов, для любого набора α, $\alpha \in N_f$, существует не менее, чем $p+1$ не пересекающихся по контактами проводящих на наборе α цепей, соединяющих полюса Σ. Если при этом $f = l_n^\sigma$ и КС Σ корректирует q замыканий, то

каждая из указанных цепей иемет длину не меньше чем $(q+1)n$, и следовательно,

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geqslant (p+1)(q+1)n \tag{4.4}$$

для любого набора α, $\alpha \in N_f$. Из (4.4) в силу (1.1) при $\delta = N_f$ вытекает, что $L^K_{(p,q)}(l^\sigma_n) \geqslant (p+1)(q+1)n$. Теорема доказана. □

§5 Теорема Храпченко. Сложность линейной функции в классе π–схем

Под контактной схемой (КС) в данном параграфе будем понимать (1,1) - КС из неориентированных контактов. Для множества C, состоящего из t контактов вида $x^{\sigma_1}_{j_1}, \ldots, x^{\sigma_t}_{j_t}$, положим $K(C) = x^{\sigma_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot x^{\sigma_t}_{j_t}$, $J(C) = x^{\bar\sigma_1}_{j_1} \vee \ldots \vee x^{\bar\sigma_t}_{j_t}$

Для КС Σ, реализующей ФАЛ f из $P_2(n)$, через $\mathcal{C}(\Sigma)$ будем обозначать множество проводящих простых цепей Σ, соединяющих ее полюса, а через $\mathcal{S}(\Sigma)$ - множество отделимых тупиковых сечений Σ, разделяющих ее полюса (см. [2, §5 гл. 2]). При этом каждому набору $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из N_f соответствует цепь C, $C \in \mathcal{C}(\Sigma)$, состоящая из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, а набору $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n$ из $\bar N_f = B^n \setminus N_f$ - сечение S, $S \in \mathcal{S}(\Sigma)$, состоящее из разомкнутых на наборе β контактов вида $x_1^{\bar\beta_1}, \ldots, x_n^{\bar\beta_n}$. Заметим, что множество $S \cap C$, то есть множество общих для S и C контактов не пусто и состоит из контактов вида $x_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_i = \beta_i$.

Результат последовательного (параллельного) соединения КС Σ_1 и Σ_2 будем обозначать через $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2$ (соответственно $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$). Назовем *простейшей π–схемой* любую КС, состоящую из одного контакта, а затем индукцией по сложности определим *π–схему* Σ как КС вида $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2$ или $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$, где Σ_1, Σ_2 — π–схемы.

Лемма 5.1. *Для π–схемы Σ любая цепь C, $C \in \mathcal{C}(\Sigma)$, и любое сечение S, $S \in \mathcal{S}(\Sigma)$ имеют ровно один общий контакт.*

Доказательство. Проведем индукцию по стороению π–схемы Σ. В случае, когда Σ - простейшая π–схема, состоящая из одного контакта, утверждение леммы, очевидно, выполняется. Докажем справедливость индуктивного перехода.

Отметим, сначала, что для произвольных КС Σ_1 и Σ_2 выполняются равенства:

$$\mathcal{C}(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2) = \{C \mid C = C_1 \cdot C_2, \text{ где } K(C) \neq 0 \text{ и } C_i \in \mathcal{C}(\Sigma_i), i = 1,2\} \tag{5.1}$$

$$\mathcal{S}(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2) = \mathcal{S}(\Sigma_1) \cup \mathcal{S}(\Sigma_2) \tag{5.2}$$

$$\mathcal{C}(\Sigma_1 \parallel \Sigma_2) = \mathcal{C}(\Sigma_1) \cup \mathcal{C}(\Sigma_2) \tag{5.3}$$

$$\mathcal{S}(\Sigma_1 \parallel \Sigma_2) = \{S \mid S = S_1 \cup S_2, \text{ где } J(S) \neq 1 \text{ и } S_i \in \mathcal{S}(\Sigma_i), i = 1,2\} \tag{5.4}$$

Действительно, любая цепь C из $\mathcal{C}(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)$ имеет вид $C = C_1 \cdot C_2$, где $C_i \in \mathcal{C}(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$, и $K(C_1) \cdot K(C_2) \neq 0$, а любое сечение S из $\mathcal{S}(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)$ совпадает либо с некоторым сечением S_1 из $\mathcal{S}(\Sigma_1)$, либо с некоторым сечением S_2 из $\mathcal{S}(\Sigma_2)$.

Заметим, что при этом

$$C \cap S = C_i \cap S_i,$$

где $S = S_i$, и, следовательно, если КС Σ_1, Σ_2 являются π–схемами, удовлетворяющими условиям леммы, то π–схема $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2$ тоже будет им удовлетворять. Аналогичным образом доказываются равенства (5.3), (5.4), и устанавливается справедливость индуктивного перехода в случае π–схемы вида $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.

Лемма доказана. □

Для пересекающихся подмножеств $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$ множества B^n обозначим через $\mathcal{R}(\mathcal{N}', \mathcal{N}'')$ множество всех пар (α, β), состоящих из соседних по какой-либо БП $x_1, \ldots, x_n$ наборов α и β куба B^n таких, что $\alpha \in \mathcal{N}'$ и $\beta \in \mathcal{N}''$. Пусть, как обычно, $\mathcal{U}^\pi$ - класс π–схем и, в соответствии с общими правилами §1, $L^\pi(f)$ - сложность реализации ФАЛ f в классе $\mathcal{U}^\pi$.

Теорема 5.1. *Для любой ФАЛ f из $P_2(n)$ и любых множеств $\mathcal{N}', \mathcal{N}''$ таких, что $\mathcal{N}' \subseteq N_f$ и $\mathcal{N}'' \subseteq \bar{N}_f$, справедливо неравенство:*

$$L^\pi(f) \geqslant \frac{|\mathcal{R}(\mathcal{N}', \mathcal{N}'')|^2}{|\mathcal{N}'| \cdot |\mathcal{N}''|} \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть π–схема Σ сложности L реализует ФАЛ f и состоит из контактов $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_L$, где $\mathcal{K}_i$ - контакт вида $x_{ji}^{\sigma_i}$, $i = 1, \ldots, L$. Каждому набору $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha \in N_f$, сопоставим цепь C_α из множества $\mathcal{C}(\Sigma)$, состоящую из контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, а каждому набору $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta \in \bar{N}_f$, - сечение S_β из множества $\mathcal{S}(\Sigma)$, состоящее из контактов вида $x_1^{\beta_1}, \ldots, x_n^{\beta_n}$. При этом в соответствии с леммой 5.1 множество $C_\alpha \cap S_\beta$ состоит из одного контакта вида $x_s^{\alpha_s}$, где $\alpha_s \neq \beta_s$. Рассмотрим следующие множества:

$$\Pi = \mathcal{N}' \times \mathcal{N}'', \ \mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{N}', \mathcal{N}'');$$

$$\mathcal{N}_i' = \{\alpha \in \mathcal{N}' : S_\alpha \ni \mathcal{K}_i\},$$

$$\mathcal{N}_i'' = \{\beta \in \mathcal{N}'' : S_\beta \ni \mathcal{K}_i\},$$

$$\Pi_i = \mathcal{N}_i' \times \mathcal{N}_i'', \mathcal{R}_i = \mathcal{R} \cap \Pi_i,$$

где $i = 1, \ldots, L$. Заметим, что при $i \neq j$ множества Π_i и Π_j ($\mathcal{R}_i$ и $\mathcal{R}_j$) не пересекаются, а объединение всех таких множеств равно множеству Π (соответственно $\mathcal{R}$). Действительно, любая пара (α, β) из Π принадлежит тому и только тому из множеств $\mathcal{N}_i' \times \mathcal{N}_i''$, $1 \leqslant i \leqslant L$, для которого контакт $\mathcal{K}_i$ является единственным

общим контактом цепи C_α и сечения S_β. При этом пара (α, β) принадлежит соответствующему множеству $\mathcal{R}_i$ тогда и только тогда, когда наборы α и β являются соседними.

Докажем теперь, что

$$|\mathcal{R}_i| \leqslant |\mathcal{N}'_i| \text{и} |\mathcal{R}_i| \leqslant |\mathcal{N}''_i| \tag{5.6}$$

для всех i, $i = 1, \ldots, L$. Для этого достаточно доказать, что для любых двух различных пар (α, β) и (γ, δ) из $\mathcal{R}_i$ выполнены соотношения: $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \delta$. Действительно, наборы α и β, а также наборы γ и δ являются соседними по БП x_{ji} и поэтому в случае $\alpha = \gamma$ или $\beta = \delta$ было бы выполнено равенство $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, которое противоречит выборц данных пар.

Из определения и свойств введенных выше множеств, а также неравенств (5.6) и неравенства Коши-Буняковского

$$\sum_{i=1}^{m} {a_i}^2 \geqslant \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| \right)^2$$

следует, что

$$|\mathcal{N}'| \cdot |\mathcal{N}''| = |\Pi| = \sum_{i=1}^{L} |\Pi_i| = \sum_{i=1}^{L} |\mathcal{N}'_i| \cdot |\mathcal{N}''_i| \geqslant \sum_{i=1}^{L} |\mathcal{R}_i|^2 \geqslant \frac{1}{L} \left(\sum_{i=1}^{L} |\mathcal{R}_i| \right) \geqslant \frac{1}{L} |\mathcal{R}|^2$$

Таким образом,

$$L \geqslant \frac{|\mathcal{R}|^2}{|\mathcal{N}'| \cdot |\mathcal{N}''|}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 5.2. *При $n \geqslant 1$ для линейной ФАЛ l_n^σ, $\sigma \in \{0, 1\}$, выполнены неравенства*

$$n^2 \leqslant L^\pi(l_n^\sigma) \leqslant 4n^2$$

Доказательство. Требуемая нижняя оценка вытекает из (5.5) при $f = l_n^\sigma$ и $\mathcal{N}' = N_f$, $\mathcal{N}'' = \bar{N}_f$ так как в данном случае

$$|\mathcal{N}'| = |\mathcal{N}''| = 2^{n-1}, \;\; |\mathcal{R}(\mathcal{N}', \mathcal{N}'')| = n \cdot 2^{n-1}$$

и поэтому $L^\pi(f) \geqslant n^2$.

При получении верхней оценки рассмотрим случай $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Для $n = 2$ искомые π–схемы Σ'_2 и Σ''_2 реализующие со сложностью 4 ФАЛ l_2 и $\bar{l}_2$ соответственно, строятся на основе совершенных ДНФ. Пусть для $n = 2^k$ искомые π–схемы Σ'_n и Σ''_n, реализующие со солжностью n^2 ФАЛ l_n и $\bar{l}_n$ уже построены. Тогда π–схемы Σ'_{2n} и Σ''_{2n}, реализующие со сложностью $4n^2$ ФАЛ l_{2n} и $\bar{l}_{2n}$ могут быть построены на основе разложений:

$$l_{2n}(x, y) = l_n(x) \cdot \bar{l}_n(y) \vee \bar{l}_n(x) \cdot l_n(y)$$

и

$$\bar{l}_{2n}(x,y) = l_n(x) \cdot l_n(y) \vee \bar{l}_n(x) \cdot \bar{l}_n(y),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$. Таким образом,

$$L^{\pi}(l_n^{\sigma}) \leqslant n^2,$$

если $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. В общем случае, когда $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$, для построения π–схем Σ'_n и Σ''_n, реализующих со сложностью не более, чем $4n^2$, ФАЛ l_n и $\bar{l}_n$ соответственно, достаточно взять построенные выше π–схемы Σ'_{2^k} и Σ''_{2^k}, а затем подставить константу 0 вместо всех БП $x_{n+1}, \ldots, x_{2^k}$.

Теорема доказана. □

Напомним (см. [2, §3,4]), что любой π–схеме Σ можно сопоставить эквивалентную формулу $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из класса $\mathcal{U}^{\Phi}$, для которой $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$, и что при поднятии отрицаний ранг формулы не изменится. Следовательно,

$$\mathcal{R}^{\Phi}(l_n^{\sigma}) \geqslant n^2$$

и, в соответствии со следствием 3 из леммы 1.1 работы [2],

$$T(l_n^{\sigma}) = D(l_n^{\sigma}) \geqslant]2 \log n[$$

С другой стороны, формулы $\mathcal{F}'_n$ и $\mathcal{F}''_n$ с поднятыми отрицаниями, которые соответствуют π–схемам Σ'_n и Σ''_n, построенными при доказательстве теоремы 5.2, имеют глубину не более, чем $2 \log n + 3$, и потому

$$T(l_n^{\sigma}) \leqslant 2 \log n + 3.$$

Литература

[1] *Алексеев В.Б., Ложкин С.А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: МГУ, 2000.

[2] *Ложкин С.А.* Лекции по основам кибернетики. М.: МГУ, 2004.

[3] *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: МГУ, 1984.

[4] *Нигматулин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[5] *Яблонский С.В.* Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. Проблемы кибернетики, вып. 2. - М.:Физматгиз, 1959. С. 75-121 (См. также Избранные труды С.В. Яблонского. М.: МАКС Пресс, 2004.).

[6] *Яблонский С.В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

[7] *Андреев А.Е.* О сложности реализации частичных булевых функций схемами из функциональных элементов. Дискретная математика, т. 1 (1989), №4. С. 36-45.

[8] *Кричевский Р.Е.* О сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих одну последовательность булевых функций. Проблемы кибернетики, вып. 12. М.: Наука, 1964. С. 45-55.

[9] *Ложкин С.А.* Об одном методе получения нижних оценок сложности контактных схем и о некоторых минимальных схемах для линейных функций. Сб. трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. С. 113-115.

[10] *Ложкин С.А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов. Математические вопросы кибернетики, вып. 6 М.: Наука, 1996. С. 189 - 214.

[11] *Ложкин С.А.* О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе. Вестник МГУ. Математика. Механика, 1996, №2. С. 80-82.

[12] *Ложкин С.А, Кошкин М. А.* О сложности реализации некоторых систем функций алгебры логики контактными многополюсниками. ДАН СССР, т. 298 (1988), №4. С. 807-811.

[13] *Ложкин С.А.* О минимальных -схемах для монотонных симметрических функций с порогом 2. Дискретная математика, т. 17 (2005), № 4, с. 108-110.

[14] *Ложкин С.А.* О синтезе формул, сложность и глубина которых не превосходят асимптотически наилучших оценок высокой степени точности. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, математика, механика. 2007 № 3, с. 19-25.

[15] *Лупанов О.Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем -принципе локального кодирования. Проблемы кибернетики, вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31-110.

[16] *Марков А.А.* Об инверсной сложности булевых функций. ДАН СССР, 1956, т. 111, №6. С. 1171 - 1174.

[17] *Мадатян Х.С.* Полный тест для бесповторных контактных схем. Проблемы кибернетики, вып. 23. М.: Наука, 1970. С. 103-118.

[18] *Редькин Н.П.* Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.

[19] *Соловьев Н.А.* Тесты (теория, построение, применение). Новосибирск: Наука, 1978.

[20] *Шоломов Л.А.* О реализации недоопределенных булевых функций схемами их функциональных элементов. Проблемы кибернетики, вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 215 - 226.