Лекция 2. Вероятностный метод. Примеры его применения в теории графов и гиперграфов.

Лектор — Нагорный Александр Степанович

anagorny@list.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Диагональные числа Рамсея. Нижняя оценка

Обозначим через K_n полный граф на n вершинах.

Определение 1. Числом Рамсея $R(k,l)$ называется наименьшее целое n такое, что при любой раскраске рёбер графа K_n в красный и синий цвета в графе найдётся либо красный подграф K_k, либо синий подграф K_l.

В 1929 г. Рамсей (Ramsey F. P.) показал **[8]**, что число $R(k,l)$ конечно для любых k и l. Актуальную информацию о числах Рамсея можно найти в **[9]**. Например, там можно увидеть, что число $R(5,5)$ не найдено до сих пор.

Диагональные числа Рамсея. Нижняя оценка

Упражнение 1. Докажите, что $R(3,3) = 6$.

Упражнение 2. Докажите, что $R(4,3) \leq 10$.

(На самом деле, $R(4,3) = 9$, но это доказать немного труднее).

Упражнение 3. Докажите, что $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$.

Теорема 1. ([3] Эрдёш, 1947). Если $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, то $R(k,k) > n$.

Диагональные числа Рамсея. Нижняя оценка

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску рёбер графа K_n, полученную раскраской каждого из рёбер независимо в красный или синий цвет (каждый цвет выбирается с равной вероятностью). Для каждого k –вершинного множества S определим событие A_S:

$$\boldsymbol{A_S} = \left\{ \begin{array}{c} \text{подграф, порождённый подмножеством } \boldsymbol{S}, \\ \text{является монохроматическим} \end{array} \right\}.$$

Очевидно, $\Pr[A_S] = 2^{1-\binom{k}{2}}$. Так как существует $\binom{n}{k}$ возможностей для выбора S, вероятность того, что по крайней мере одно из событий A_S произойдёт, не больше, чем $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$.

Диагональные числа Рамсея. Нижняя оценка

Доказательство (окончание). Таким образом, с положительной вероятностью ни одно из событий A_S не произойдёт, а значит, существует 2–раскраска рёбер графа K_n без монохроматических подграфов, откуда $R(k,k) > n$. ■

Следствие. Для всех $k \geq 3$ верно $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$.

Упражнение 4. Докажите это следствие самостоятельно.

Существование турнира со свойством S_k

Определение 2. Турниром $T = (V, E)$ на множестве V из n игроков назовём результат ориентации всех рёбер графа K_n (с множеством вершин V).

Определение 3. Будем говорить, что турнир T **обладает свойством** S_k, если для каждого множества из k игроков в T найдётся хотя бы один игрок, который побеждает их всех.

Пример. Ориентированный треугольник $T_3 = (V, E)$, в котором $V = \{1, 2, 3\}$ и $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, обладает свойством S_1.

Существование турнира со свойством S_k

Пусть $f(k)$ – минимальное число вершин в турнире, обладающем свойством S_k.

Упражнение 5. Докажите, что $f(1) = 3$ и $f(2) = 7$.

Теорема 2 ([5] Эрдёш, 1963). Если $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то существует турнир на n вершинах, обладающий свойством S_k.

Доказательство. Рассмотрим случайный турнир T с множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$ (ориентация каждого ребра выбирается независимо, и обе возможности равновероятны).

Существование турнира со свойством S_k

Доказательство (продолжение). Для каждого фиксированного k– элементного подмножества K множества V определим событие A_K:

$$\boldsymbol{A_K} = \left\{ \begin{array}{c} \text{в турнире } \boldsymbol{T} \text{ нет вершины,} \\ \text{которая побеждает все вершины из } \boldsymbol{K} \end{array} \right\}.$$

Ясно, что $\Pr[A_K] = (1 - 2^{-k})^{n-k}$, поскольку для каждой фиксированной вершины $v \in V \backslash K$ вероятность того, что v не побеждает все вершины из K, равна $(1 - 2^{-k})$, и все $n - k$ событий, соответствующих различным выборам вершин v, являются независимыми.

Существование турнира со свойством S_k

Доказательство (окончание). Отсюда следует, что

$$\Pr\left[\bigvee_{\substack{K\subset V\\|K|=k}} A_K\right] \le \sum_{\substack{K\subset V\\|K|=k}} \Pr[\,A_K] = \binom{n}{k}\left(1-2^{-k}\right)^{n-k} < 1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью ни одно из событий A_K не произойдёт, т. е. существует турнир на n вершинах, обладающий свойством S_k. ■

Существование турнира со свойством S_k

Следствие. $f(k) \le k^2 2^k \ln 2 \big(1 + o(1)\big), k \to \infty$.

Упражнение 6. Докажите это следствие самостоятельно.

Теорема 3 ([7] Секереш, 1968; без доказательства**).**

$$f(k) \ge c_1 k 2^k, \text{ где } c_1 = const.$$

Мощность доминирующего множества

Определение 4. Доминирующим множеством назовём такое подмножество U множества вершин V неориентированного графа $G = (V, E)$, что всякая вершина $v \in V \backslash U$ смежна хотя бы с одной вершиной из U.

Теорема 4. Пусть $G = (V, E)$ – граф с n вершинами и минимальной степенью $\delta > 1$. Тогда G имеет доминирующее множество с не более чем $n\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ вершинами.

Мощность доминирующего множества

Доказательство. Пусть $p \in [0,1]$. Будем выбирать случайно и независимо каждую вершину из V с вероятностью $p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$. Пусть X — (случайное) множество всех выбранных таким образом вершин, а $Y = Y_X$ — множество тех вершин из $V \backslash X$, которые не имеют соседей в X. Ясно, что $\mathbf{E}[|X|] = np$. Для каждой фиксированной вершины $v \in V$, по определению,

$$\Pr[v \in Y] = \Pr\left[\begin{matrix}\text{вершина } v \text{ и все её соседи} \\ \text{не принадлежат } X\end{matrix}\right] \leq (1-p)^{\boldsymbol{\delta}+1}.$$

Так как математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий,

Мощность доминирующего множества

и поскольку случайные переменные $|Y|$ могут быть представлены в виде сумм n индикаторов χ_v, мы получаем, что математическое ожидание величины $|X|+|Y|$ не превышает величины

$$np + n(1-p)^{\delta+1} = n\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1} + n\left(1 - \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\right)^{\delta+1} \le n\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}.$$

Следовательно, существует по крайней мере одно множество $X \subseteq V$, такое, что

$$|X| + |Y_X| \le n\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}.$$

Множество $U = X \cup Y_X$, очевидно, является искомым доминирующим множеством нужной мощности. ■

Гиперграфы, обладающие свойством B

Определение 5. Пара $H = (V, E)$, где V — конечное множество, элементы которого называются **вершинами**, а E — некоторое семейство подмножеств множества V, называемых **рёбрами**, называется **гиперграфом**.

Определение 6. Гиперграф называется n**-однородным**, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Определение 7. Говорят, что гиперграф **обладает свойством** B (или что его вершины можно раскрасить в два цвета), если существует раскраска множества V в два цвета, такая, что никакое ребро не является монохроматическим.

Гиперграфы, обладающие свойством B

Через $m(n)$ обозначим минимальное число рёбер n-однородного гиперграфа, который не обладает свойством B.

Теорема 5 ([4] Эрдёш, 1963). Каждый n-однородный гиперграф с числом рёбер, меньшим 2^{n-1}, обладает свойством B, т. е.

$$m(n) \geq 2^{n-1}.$$

Гиперграфы, обладающие свойством $\boldsymbol{B}$

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ является гиперграфом с числом рёбер, меньшим 2^{n-1}. Раскрасим множество V в два цвета случайным образом. Определим для каждого $e \in E$ событие $A_e = \{$ребро e является монохроматическим$\}$.

Понятно, что $\Pr[A_e] = 2^{1-n}$. Следовательно,

$$\Pr\left[\bigvee_{e \in E} A_e\right] \le \sum_{e \in E} \Pr[\boldsymbol{A_e}] < 2^{n-1} 2^{1-n} = 1.$$

Таким образом, существует 2-раскраска вершин гиперграфа H без монохроматических рёбер. Поэтому $m(n) \ge 2^{n-1}$. ■

Гиперграфы, обладающие свойством B

Теорема 6 ([6] Эрдёш, 1964; без доказательства**).**

$$m(n) < (1 + o(1))\,\frac{e\ln 2}{4} n^2 2^n, n \to \infty.$$

Мощность (k, l) – системы

Пусть $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{h}$ – некоторое семейство пар подмножеств произвольного множества.

Семейство $\mathcal{F}$ называется (k, l)- **системой**, если $|A_i| = k$ и $|B_i| = l$ при всех $1 \leq i \leq h$, $A_i \cap B_i = \emptyset$ и $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ для всех различных i,j $(1 \leq i, j \leq h)$.

Теорема 7 ([2] Боллобаш, 1965). Если семейство $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{h}$ является (k, l)- системой, то

$$h \leq \binom{k+l}{k}.$$

Мощность (k, l) – системы

Доказательство. Пусть $X = \cup_{i=1}^{h}(A_i \cup B_i)$. Рассмотрим случайный порядок **π** на множестве X.

Пусть для каждого $i, 1 \leq i \leq h$, событие $\boldsymbol{X_i}$ заключается в том, что все элементы подмножества A_i предшествуют всем элементам подмножества B_i относительно порядка **π**.

Ясно, что $\Pr[\boldsymbol{X_i}] = 1/\binom{k+l}{k}$. Легко проверить, что события $\boldsymbol{X_i}$ попарно не совместны (**сделайте это!**). Значит,

$$1 \geq \Pr\left[\bigvee_{i=1}^{h} \boldsymbol{X_i}\right] = \sum_{i=1}^{h} \Pr[\boldsymbol{X_i}] = h \cdot 1/\binom{k+l}{k}. \quad \blacksquare$$

Мощность (k, l) – системы

Замечание. Пример семейства $\mathcal{F} = \{(A, X \backslash A) : A \subset X, |A| = k\}$, где $X = \{1, 2, \dots, k + l\}$, показывает, что теорема 7 даёт точную оценку.

Литература к лекции

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, С. 18-27.
2. Bollobás B. (1965) On generalized graphs // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **16**, P. 447-452.
3. Erdós P. (1947) Some remarks on the theory of graphs // *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, P. 292-294.
4. Erdós P. (1963a) On a combinatorial problem, I, // *Nordisk Mat. Tidskr.* **11**, P. 5-10.
5. Erdós P. (1963b) On a problem of graph theory // *Math. Gaz.* **47**, P. 220-223.

Литература к лекции

6. Erdós P. (1964) On a combinatorial problem, II, // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15**, P. 445-447.

7. Moon J.W. (1968) *Topics on Tournaments* // Holt, Reinhart and Winston, New York.

8. Ramsey F.P. (1929) On a problem of formal logic // *Proc. London Math. Soc.* **30**(2), P. 264-286.

9. https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!