

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 49

Логика Хоара
Автоматизация проверки правильности программ

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Логика Хоара

Для проверки частичной корректности модельных императивных программ можно адаптировать **метод семантических таблиц**: ввести понятие **вывода** (дерева, построенного по **правилам вывода**) и свести проверку корректности к построению **успешного** вывода

Правила вывода будут выглядеть так:¹

$$\frac{\Phi}{\Psi}, \quad \frac{\Phi}{\Psi, \Omega}, \quad \frac{\Phi}{\varphi} \quad \text{или} \quad \frac{\Phi}{\varphi, \Omega, \psi},$$

где Φ, Ψ, Ω — триплеты Хоара и φ, ψ — формулы логики предикатов

Содержательное прочтение:

если в $\mathcal{I}$ истинны все триплеты и формулы под чертой
то в $\mathcal{I}$ истинен триплет Φ

¹ Hoare C.A.R. An axiomatic basis for computer programming. 1969

Логика Хоара

Вот эти правила:

$$R_{\emptyset} : \frac{\{\varphi\} \emptyset \{\varphi\}}{\top}$$

$$R_{:=} : \frac{\{\varphi\{x/t\}\} x := t; \{\varphi\}}{\top}$$

(подстановка $\{x/t\}$ правильна для φ)

$$R_{\text{if}} : \frac{\{\varphi\} \text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } \{\psi\}}{\{\varphi \ \& \ C\} \pi_1 \{\psi\}, \{\varphi \ \& \ \neg C\} \pi_2 \{\psi\}}$$

$$R_{\text{while}} : \frac{\{\varphi\} \text{while } C \text{ do } \pi \text{ od } \{\varphi \ \& \ \neg C\}}{\{\varphi \ \& \ C\} \pi \{\varphi\}}$$

$$R_{\text{seq}} : \frac{\{\varphi\} \pi_1 \pi_2 \{\psi\}}{\{\varphi\} \pi_1 \{\chi\}, \{\chi\} \pi_2 \{\psi\}}$$

$$R_{\text{inf}} : \frac{\{\varphi\} \pi \{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\} \pi \{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

Логика Хоара

Лемма (о корректности правил вывода Хоара)

Для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любого из правил

$$\begin{array}{c} R_{\emptyset}, R_{:=}, R_{\text{if}}, R_{\text{while}}, R_{\text{seq}}, R_{\text{while}} \\ \Phi \qquad \Phi \qquad \Phi \qquad \Phi \\ (\overline{\Psi}, \quad \overline{\Psi, \Omega}, \quad \overline{\varphi}, \quad \overline{\varphi, \Psi, \psi}) \end{array}$$

верно следующее: если $\mathcal{I} \models \Psi$, $\mathcal{I} \models \Omega$, $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \models \psi$, то $\mathcal{I} \models \Phi$

Доказательство.

Подробно рассмотрим только правило $R_{:=}: \frac{\{\varphi\{x/t\}\}x := t; \{\varphi\}}{\vdash}$

Пусть σ — произвольное состояние данных, такое что $\mathcal{I} \models \varphi\{x/t\}\sigma$

Шаг вычисления для программы « $x := t$;» устроен так:

$$\langle x := t; \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \emptyset \mid \sigma\{x \leftarrow t\sigma\} \rangle$$

Так как $\mathcal{I} \models \varphi\{x/t\}\sigma$, то верно и $\mathcal{I} \models \varphi(\sigma\{x \leftarrow t\sigma\})$

Следовательно, $\mathcal{I} \models \{\varphi\{x/t\}\}x := t; \{\varphi\}$

Корректность остальных правил обосновывается по той же схеме



Логика Хоара

Вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ — это дерево следующего вида:

- ▶ вершины размечены триплетами и формулами
- ▶ корень помечен триплетом $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$
- ▶ дети вершины определяются относительно правил логики Хоара так же, как и в дереве табличного вывода относительно правил табличного вывода
- ▶ все листья помечены формулами

Успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$ — это конечный вывод, все листья которого помечены формулами, истинными в $\mathcal{I}$

Логика Хоара

Теорема (о корректности логики Хоара)

Если существует успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный успешный вывод D для $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в $\mathcal{I}$

Во всех листьях D записаны формулы, истинные в $\mathcal{I}$

Применив лемму о корректности правил вывода конечное число раз, получим истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в $\mathcal{I}$ ▼

Логика Хоара

Пример: алгоритм Эвклида

$\pi = \mathbf{while} \neg(x = y) \mathbf{do} \mathbf{if} x > y \mathbf{then} x := x - y; \mathbf{else} y := y - x; \mathbf{fi} \mathbf{od}$

Докажем, что в результате выполнения π в интерпретации $Ar_{\mathbb{Z}}$ в x записывается **наибольший общий делитель** (НОД) положительных чисел, заданных в x и y перед выполнением

Предусловие φ : числа x и y положительны, и z — переменная, обозначающая НОД x и y в начале выполнения программы

$$u|v = \exists w (v = u \cdot w)$$

$$\gcd(u, v, w) = (w|u) \& (w|v) \& \forall r ((r|u) \& (r|v) \rightarrow (w \geq r))$$

$$\varphi = x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)$$

Постусловие ψ : в x записан требуемый НОД

$$\psi = (x = z)$$

Для обоснования правильности π достаточно построить успешный табличный вывод для триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Логика Хоара

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}
while ¬(x = y) do if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi od
{x = z}
```

$\chi_1: x > 0 \ \& \ x > 0 \ \& \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \text{gcd}(x, y, z)$

$\chi_2: x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg\neg(x = y) \rightarrow x = z$

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}
while ¬(x = y) do if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi od
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z) & ¬¬(x = y)}
```

$$R_{inf}: \frac{\{\varphi\}\pi\{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\}\pi\{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

$$\mathcal{I} \models \chi_1$$

$$\mathcal{I} \models \chi_2$$

Логика Хоара

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}
while ¬(x = y) do if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi od
{x = z}
```

$\chi_1: x > 0 \ \& \ x > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)$

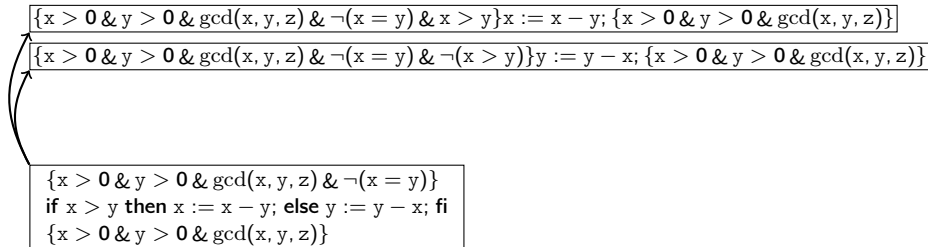
$\chi_2: x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg\neg(x = y) \rightarrow x = z$

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}
while ¬(x = y) do if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi od
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z) & ¬¬(x = y)}
```

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z) & ¬(x = y)}
if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}
```

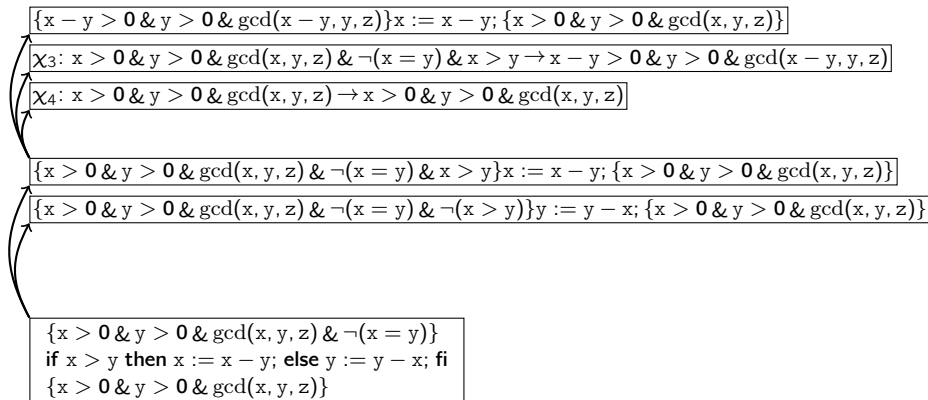
$$R_{\text{while}}: \frac{\{\varphi\} \text{while } C \text{ do } \pi \text{ od} \{\varphi \ \& \ \neg C\}}{\{\varphi \ \& \ C\} \pi \{\varphi\}}$$

Логика Хоара



$$R_{\text{if}}: \frac{\{\varphi\} \text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \{\psi\}}{\{\varphi \ \& \ C\} \pi_1 \{\psi\}, \{\varphi \ \& \ \neg C\} \pi_2 \{\psi\}}$$

Логика Хоара

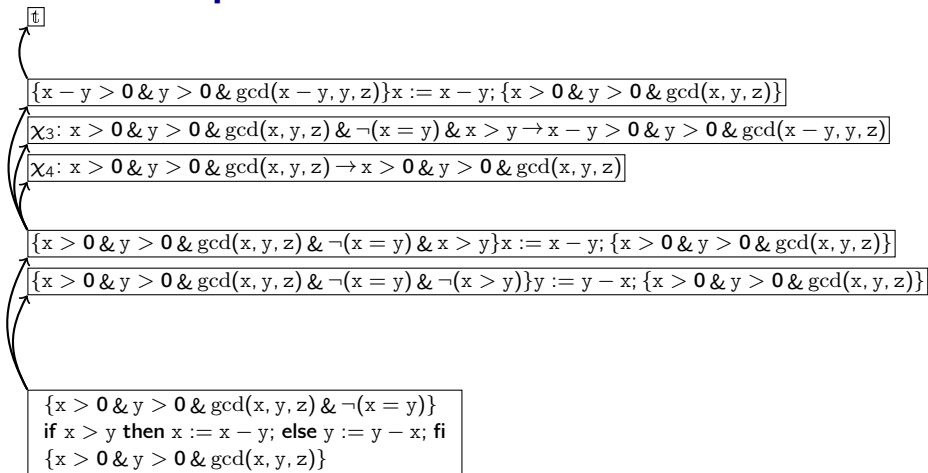


$$R_{inf}: \frac{\{\varphi\} \pi \{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\} \pi \{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

$$\mathcal{I} \models \chi_3$$

$$\mathcal{I} \models \chi_4$$

Логика Хоара



$$R ::= \frac{\{\varphi\{x/t\}\} x := t; \{\varphi\}}{\text{tt}}$$

Логика Хоара

$\boxed{\text{tt}}$

$\{x - y > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x - y, y, z)\} x := x - y; \{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\chi_3: x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg(x = y) \ \& \ x > y \rightarrow x - y > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x - y, y, z)$

$\chi_4: x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)$

$\{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg(x = y) \ \& \ x > y\} x := x - y; \{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg(x = y) \ \& \ \neg(x > y)\} y := y - x; \{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\chi_5: \quad x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg(x = y) \ \& \ \neg(x > y) \rightarrow$
 $\quad \quad \quad x > 0 \ \& \ y - x > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y - x, z)$

$\chi_6: x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)$

$\{x > 0 \ \& \ y - x > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y - x, z)\} y := y - x; \{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)\}$

$$R_{inf}: \frac{\{\varphi\} \pi \{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\} \pi \{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

$$\mathcal{I} \models \chi_5$$

$$\mathcal{I} \models \chi_6$$

Логика Хоара

$\top$

$\{x - y > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x - y, y, z)\} x := x - y; \{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\chi_3: x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg(x = y) \ \& \ x > y \rightarrow x - y > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x - y, y, z)$

$\chi_4: x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)$

$\{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg(x = y) \ \& \ x > y\} x := x - y; \{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg(x = y) \ \& \ \neg(x > y)\} y := y - x; \{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\chi_5: \quad x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \ \& \ \neg(x = y) \ \& \ \neg(x > y) \rightarrow$
 $\quad \quad \quad x > 0 \ \& \ y - x > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y - x, z)$

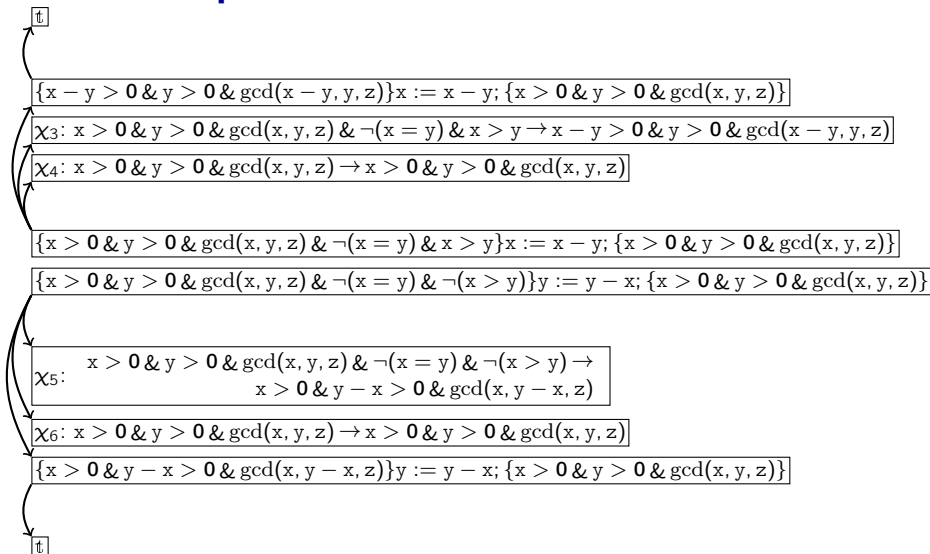
$\chi_6: x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)$

$\{x > 0 \ \& \ y - x > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y - x, z)\} y := y - x; \{x > 0 \ \& \ y > 0 \ \& \ \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\top$

$$R ::= \frac{\{\varphi\{x/t\}\} x := t; \{\varphi\}}{\top}$$

Логика Хоара



Частичная корректность программы доказана

Полнота логики Хоара

Согласно теореме о корректности логики Хоара, правильность программы можно обосновать, построив успешный табличный вывод подходящего триплета Хоара

А правда ли, что корректность **любой** правильной программы может быть обоснована построением успешного табличного вывода подходящего триплета?

На самом деле это не один вопрос, а два принципиально разных:

1. Все ли свойства правильности программ могут быть записаны в виде формул логики предикатов?
2. Для любого ли истинного триплета существует успешный вывод?

Полнота логики Хоара

Ответ на оба вопроса существенно зависит от **сигнатуры**, в которой записываются предусловия и постусловия

Если эта сигнатура слишком «скудная», то:

- ▶ Её может быть недостаточно для записи свойств правильности программы
- ▶ При применении правил

$$R_{seq} : \frac{\{\varphi\}\pi_1 \quad \pi_2\{\psi\}}{\{\varphi\}\pi_1\{\chi\}, \{\chi\}\pi_2\{\psi\}}$$

$$R_{inf} : \frac{\{\varphi\}\pi\{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\}\pi\{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

может и не найтись подходящих формул φ' , ψ' , χ , позволяющих достроить вывод до успешного

При этом чем «богаче» сигнатура, тем труднее анализировать истинность формул и подбирать «подходящие» формулы при построении вывода

Автоматизация проверки правильности программ

А если сигнатура достаточно «богата», то можно ли реализовать программу, автоматически доказывающую корректность программ?

Как и в вопросе про полноту, это на самом деле не один вопрос, а два:

1. Можно ли автоматизировать запись триплетов Хоара, отвечающих свойствам правильности программ?
2. Можно ли автоматизировать построение успешного вывода для заданного триплета Хоара?

Ответ на первый вопрос однозначен — **нет**:

один из главных недостатков формальной верификации состоит в том, что формальная спецификация программы, как правило, создаётся вручную специально обученным экспертом

Автоматизация проверки правильности программ

С автоматизацией построения успешного вывода для заданного триплета Хоара дела обстоят чуть лучше

Слабейшим предусловием для программы π и постусловия ψ в интерпретации $\mathcal{I}$ называется формула $wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$, такая что

- ▶ $\mathcal{I} \models \{wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})\}\pi\{\psi\}$ и
- ▶ для любой формулы φ , такой что $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$, верно соотношение $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$

Слабейших предусловий на самом деле может быть много, но они имеют одинаковый смысл в $\mathcal{I}$, так что для простоты иногда будем считать, что оно единственно

Теорема. $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\} \Leftrightarrow$
 $\mathcal{I} \models \{wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})\}\pi\{\psi\}$ и $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$

Доказательство. Следует из определения слабейшего предусловия



Автоматизация проверки правильности программ

Теорема (о слабом предусловии)

- ▶ $wpr(\emptyset, \psi, \mathcal{I}) = \psi$
- ▶ $wpr(x := t; , \psi, \mathcal{I}) = \psi\{x/t\},$
если подстановка $\{x/t\}$ правильна для ψ
- ▶ $wpr(\text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \psi, \mathcal{I}) =$
 $C \ \& \ wpr(\pi_1, \psi, \mathcal{I}) \vee \neg C \ \& \ wpr(\pi_2, \psi, \mathcal{I})$
- ▶ $wpr(\pi_1 \ \pi_2, \psi, \mathcal{I}) = wpr(\pi_1, wpr(\pi_2, \psi, \mathcal{I}), \mathcal{I})$

Доказательство опустим, чтобы сэкономить время

Таким образом,

- ▶ проверка корректности программы сводится к вычислению слабого предусловия и проверки истинности заданной формулы
- ▶ для программ **без циклов** слабое предусловие не зависит от выбора интерпретации и вычисляется очень просто

Автоматизация проверки правильности программ

А как вычислить слабейшее предусловие для цикла?

Устройство слабейшего предусловия тесно связано с устройством правил доказательства корректности программ:
вычисление этого предусловия — настолько же (не)простая задача, насколько и применение правила для построения успешного вывода

Чтобы применить правило

$$R_{\text{while}} : \frac{\{\varphi\} \text{while } C \text{ do } \pi \text{ od } \{\varphi \ \& \ \neg C\}}{\{\varphi \ \& \ C\} \pi \{\varphi\}},$$

требуется предварительно найти формулу φ , реализующую свойство состояний данных, сохраняющееся при выполнении каждого витка цикла

Эта формула φ называется **инвариантом цикла** и явно или неявно используется практически всегда при анализе циклов

Автоматическая генерация инвариантов циклов — это **ключевая проблема** автоматизации проверки правильности программ