Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 10

Метод семантических таблиц:
табличный вывод

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Вступление

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow$ семантическая таблица $\langle \mid \varphi \rangle$ невыполнима

Для доказательства общезначимости формул
(и более широко — невыполнимости таблиц)
будем применять правила заранее сформулированного списка

Доказательства такого вида:
преобразование записей согласно заданному своду правил —
принято называть логическим выводом

Логический вывод, в котором преобразуются семантические таблицы,
принято называть табличным выводом, и соответствующие
правила преобразования — правилами табличного вывода

Начнём с определения свода этих правил

Правила табличного вывода

Будем использовать правила табличного вывода двух видов:

$$(*)\colon \frac{T_0}{T_1}, \qquad (**)\colon \frac{T_0}{T_1,\ T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Согласно правилу, рассматриваемая таблица T_0 преобразуется

- $(*)$ в таблицу T_1 для последующего рассмотрения
- $(**)$ в таблицы T_1 и T_2 для поочерёдного рассмотрения

При этом правила будут подобраны так, чтобы

- $(*)$ таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и T_1
- $(**)$ таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и **хотя бы одна** из таблиц T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 под чертой в правилах иногда называют альтернативами

Правила табличного вывода

Включим в свод 12 правил табличного вывода:

- $12 = 2 \cdot 6$
  - 2 части таблицы: левая, правая
  - 6 логических операций: $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$
- согласно каждому правилу, в одной из частей таблицы выбирается одна формула, и эта формула преобразуется в одну или несколько в зависимости от её вида и расположения

В правилах будут использоваться следующие обозначения:

- Γ, Δ — произвольные множества формул
- φ, ψ — произвольные формулы
- x — произвольная предметная переменная
- t — произвольный терм,
  такой что подстановка $\{\mathrm{x}/t\}$ правильна для φ
- $\mathbf{c}$ — произвольная константа,
  не содержащаяся в формулах из $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$

Правила табличного вывода

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\vee: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to: \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\to: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

$$L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\, \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\, \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \mid \Delta \rangle} \qquad R\forall: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \forall \mathrm{x}\, \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \rangle}$$

$$L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists \mathrm{x}\, \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta \rangle} \qquad R\exists: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists \mathrm{x}\, \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists \mathrm{x}\, \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \rangle}$$

Правила табличного вывода

Пара слов об ограничениях на терм t и константу c в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

Если разрешить подставлять любые термы в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle \forall x\ \exists y\ P(x, y) \mid \exists y\ P(y, y) \rangle}{\langle \forall x\ \exists y\ P(x, y), \exists y\ P(y, y) \mid \exists y\ P(y, y) \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять «использованные» константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle \exists x\ P(x) \mid P(\mathbf{c}) \rangle}{\langle P(\mathbf{c}) \mid P(\mathbf{c}) \rangle}$$

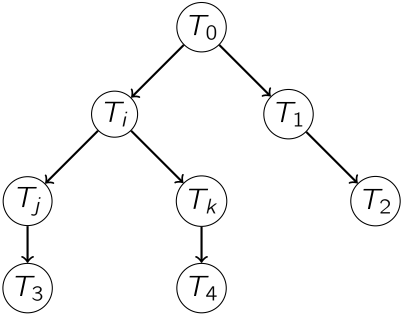
— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

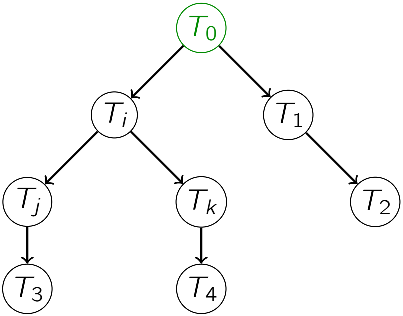
1. Всем вершинам приписаны семантические таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

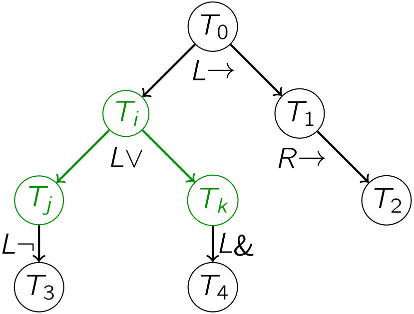
2. Корню приписана таблица T_0



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

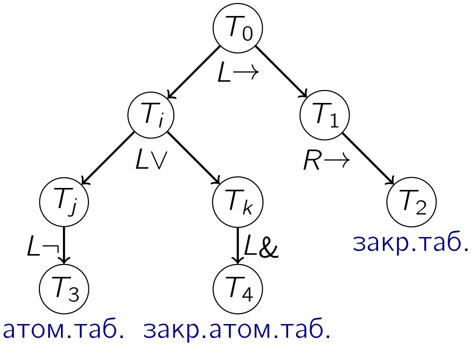
3. Из каждой вершины T_i исходит не более двух дуг, и если исходит
   - ровно одна дуга (в T_j), то $\dfrac{T_i}{T_j}$ — правило табличного вывода
   - две дуги (в T_j, T_k), то $\dfrac{T_i}{T_j,\ T_k}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

4. все таблицы, приписанные листьям, закрыты или атомарны (в том числе могут быть одновременно закрытыми и атомарными)



Табличный вывод

Табличный вывод успешен, если
он конечен и всем его листьям приписаны закрытые таблицы

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица,
для которой он построен, невыполнима (*докажем это позже*)

В частности, согласно теореме о табличной проверке общезначимости,
если этот вывод построен для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$, то верно $\models \varphi$

Перед строгой формулировкой и обоснованием
свойств успешных выводов приведём несколько примеров

Примеры табличных выводов

$$
\begin{tikzcd}
 & \langle \mid (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi) \rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \varphi \to \neg\psi \mid \psi \to \neg\varphi \rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \varphi \to \neg\psi, \psi \mid \neg\varphi \rangle \arrow[d, "R\neg"] & \\
 & \langle \varphi \to \neg\psi, \psi, \varphi \mid \rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\to"] & \\
\langle \neg\psi, \psi, \varphi \mid \rangle \arrow[d, "L\neg"] & & \langle \psi, \varphi \mid \varphi \rangle \\
\langle \psi, \varphi \mid \psi \rangle & & \text{закрытая таблица} \\
\text{закрытая таблица} & &
\end{tikzcd}
$$

Вывод успешен

При этом для любых формул φ, ψ верно $\models (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \forall x\,(A(x)\to B(x))\to(\forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x))\rangle$$

$$\big\downarrow R\to$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)) \mid \forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x)\rangle$$

$$\big\downarrow R\to$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x) \mid \forall x\,B(x)\rangle$$

$$\big\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x) \mid B(\mathbf{c})\rangle$$

$$\big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x), A(\mathbf{c}) \mid B(\mathbf{c})\rangle$$

$$\big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x), A(\mathbf{c})\to B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \mid B(\mathbf{c})\rangle$$

$$L\to$$

$$\left\langle \begin{array}{l}\forall x\,(A(x)\to B(x)),\\ \forall x\,A(x), B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c})\end{array} \mid B(\mathbf{c})\right\rangle \qquad \left\langle \begin{array}{l}\forall x\,(A(x)\to B(x)),\\ \forall x\,A(x), A(\mathbf{c})\end{array} \mid B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c})\right\rangle$$

Закрытая таблица Закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models \forall x\,(A(x)\to B(x))\to(\forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x))$

Примеры табличных выводов

$$\langle\ \mid \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x})\rangle$$

$$\big\downarrow R{\to}$$

$$\langle \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x})\rangle$$

$$\big\downarrow L\exists$$

$$\langle \mathrm{P}(\mathbf{c_1}) \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x})\rangle$$

$$\big\downarrow R\forall$$

$$\langle \mathrm{P}(\mathbf{c_1}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c_2})\rangle$$

Незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен

При этом $\not\models \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x})$

Примеры табличных выводов

$$\langle\ |\ \forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists y\ \forall x\ P(x,y)\rangle$$
$$\big\downarrow R{\to}$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y)\ |\ \exists y\ \forall x\ P(x,y)\rangle$$
$$\big\downarrow L\forall$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1}, y)\ |\ \exists y\ \forall x\ P(x,y)\rangle$$
$$\big\downarrow R\exists$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1}, y)\ |\ \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x, \mathbf{c_2})\rangle$$
$$\big\downarrow L\exists$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1}, \mathbf{c_3})\ |\ \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x, \mathbf{c_2})\rangle$$
$$\big\downarrow R\forall$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1}, \mathbf{c_3})\ |\ \exists y\ \forall x\ P(x,y), P(\mathbf{c_4}, \mathbf{c_2})\rangle$$
$$\big\downarrow L\forall$$
$$\infty$$

Вывод бесконечен (и, следовательно, неуспешен)

При этом $\not\models \forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists y\ \forall x\ P(x,y)$

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \exists x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \exists x\, P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow R\to$$

$$\langle \exists x\, \forall y\, P(x,y) \mid \forall y\, \exists x\, P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow L\exists$$

$$\langle \forall y\, P(\mathbf{c_1},y) \mid \forall y\, \exists x\, P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall y\, P(\mathbf{c_1},y) \mid \exists x\, P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall y\, P(\mathbf{c_1},y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists x\, P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow R\exists$$

$$\langle \forall y\, P(\mathbf{c_1},y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists x\, P(x,\mathbf{c_2}), P(\mathbf{c_4},\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\infty$$

Вывод бесконечен (и, следовательно, неуспешен)

При этом $\models \exists x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \exists x\, P(x,y)$