# Распределенные алгоритмы и системы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

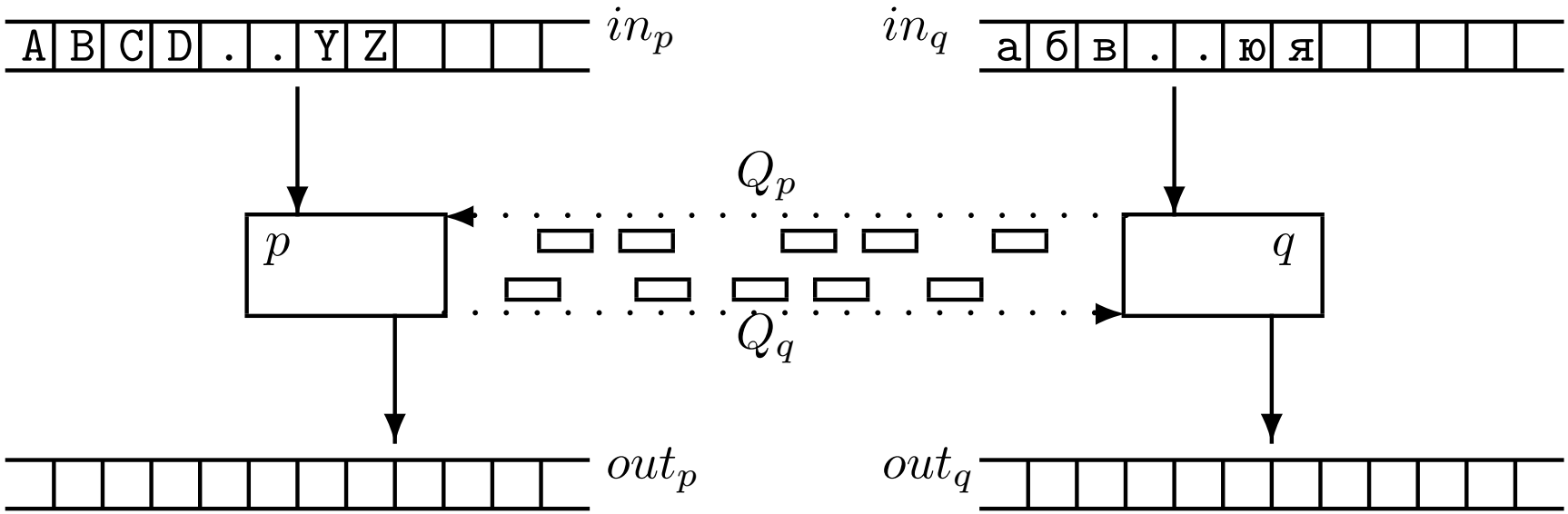
Блок 11

Корректность
симметричного протокола раздвижного окна

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

# Напоминание




Безопасность BSWP: в каждой достижимой конфигурации для каждого номера $i$ верно $out_p[i] \in \{in_q[i], \perp\}$ и значение $out_q[i] \in \{in_p[i], \perp\}$

$$\forall x \in \mathfrak{R}(S) : \forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \in \{in_q[i], \perp\} \,\&\, out_q[i] \in \{in_p[i], \perp\}$$

Живость BSWP для номера $k$, $k \in \mathbb{N}_0$:
в любом вычислении содержится конфигурация, в которой все значения $out_p[0], \ldots, out_p[k], out_q[0], \ldots, out_q[k]$ отличны от $\perp$

$$\forall \pi \in \Pi(S) : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \perp \,\&\, out_q \neq \perp$$

# Напоминание

**var** $s_p : \mathbb{N}_0 = 0$;

**var** $a_p : \mathbb{N}_0 = 0$;

**var** $in_p$ : **array of word** = все данные для отправки;

**var** $out_p$ : **array of word** $= (\perp, \perp, \dots)$;

**Процедура $S_p$** (предусловие: $a_p < s_p + \ell_p$)

1. Выбрать $i \in \mathbb{N}_0$: $a_p \le i < s_p + \ell_p$
2. $send(\textbf{pack}, \langle in_p[i], i \rangle)$

**Процедура $R_p$** (предусловие: очередь $Q_p$ непуста)

1. $receive(\textbf{pack}, \langle w, i \rangle)$
2. Если $out_p[i] = \perp$:
   - 2.1 $out_p[i] := w$;
   - 2.2 $a_p := \max(a_p, i - \ell_q + 1)$;
   - 2.3 $s_p := \min(j \mid out_p[j] = \perp)$;

**Процедура $L_p$** (предусловие: очередь $Q_p$ непуста)

1. $receive(\textbf{pack}, \langle w, i \rangle)$

Будем считать, что переход в с.п. отвечает однократному полному выполнению одной из процедур

# Безопасность BSWP

Рассмотрим такую совокупность утверждений:

$p^0$: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, s_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$

$p^1$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\textbf{pack}, \langle w, i \rangle) \in Q_p \Rightarrow w = in_q[i] \,\&\, (i < s_q + \ell_q)$

$p^2$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \neq \perp \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \,\&\, (a_p > i - \ell_q)$

$p^3$: $a_p \leq s_q$

$q^0$: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, s_q - 1\} : out_q[i] \neq \perp$

$q^1$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\textbf{pack}, \langle w, i \rangle) \in Q_q \Rightarrow w = in_p[i] \,\&\, (i < s_p + \ell_p)$

$q^2$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_q[i] \neq \perp \Rightarrow out_q[i] = in_p[i] \,\&\, (a_q > i - \ell_p)$

$q^3$: $a_q \leq s_p$

$P_{BSWP} = p^0 \,\&\, p^1 \,\&\, p^2 \,\&\, p^3 \,\&\, q^0 \,\&\, q^1 \,\&\, q^2 \,\&\, q^3$

**Лемма (об инварианте BSWP).** $P_{BSWP}$ **— инвариант BSWP**

# Безопасность BSWP

Доказательство.

По определению инварианта, следует доказать два утверждения:

1. Для любой начальной конфигурации $\gamma$ верно $P_{BSWP}(\gamma)$
2. Если $P_{BSWP}(\gamma)$ и $\gamma \to \delta$, то $P_{BSWP}(\delta)$

*1.*

$p^0$: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, s_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$

В начальной конфигурации верно $s_p = 0$

$p^1$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\textbf{pack}, \langle w, i \rangle) \in Q_p \Rightarrow w = in_q[i] \,\&\, (i < s_q + \ell_q)$

В начальной конфигурации очередь $Q_p$ пуста

$p^2$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \neq \perp \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \,\&\, (a_p > i - \ell_q)$

В начальной конфигурации все значения $out_p[i]$ равны $\perp$

$p^3$: $a_p \leq s_q$

В начальной конфигурации верно $a_p = 0 \leq 0 = s_q$

$q^0$, $q^1$, $q^2$, $q^3$ — аналогично

# Безопасность BSWP

Доказательство. *2.* $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

Подробно рассмотрим переход $\gamma \to \delta$, отвечающий выполнению процедуры $\mathbf{R}_p$

*Процедура* $\mathbf{R}_p$ (предусловие: очередь $Q_p$ непуста)

1. *receive*(**pack**, $\langle w, i\rangle$)
2. Если $out_p[i] = \perp$:
   - 2.1 $out_p[i] := w$;
   - 2.2 $a_p := \max(a_p, i - \ell_q + 1)$;
   - 2.3 $s_p := \min(j \mid out_p[j] = \perp)$;

$p^0$: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, s_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$

Если $out_p$ не изменяется, то и $s_p$ не изменяется

Иначе по (2.3) после выполнения $\mathbf{R}_p$ верно $s_p = \min(j \mid out_p[j] = \perp)$

$p^1$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\mathbf{pack}, \langle w, i\rangle) \in Q_p \Rightarrow w = in_q[i]\,\&(i < s_q + \ell_q)$

После выполнения $\mathbf{R}_p$ в $Q_p$ не появляются новые пакеты, $in_q$ не изменяется и $s_q$ не уменьшается

# Безопасность BSWP

Доказательство. *2.* $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

*Процедура* $\mathbf{R}_p$ (предусловие: очередь $Q_p$ непуста)

1. *receive*(**pack**, $\langle w, i\rangle$)
2. Если $out_p[i] = \bot$:
   - 2.1 $out_p[i] := w$;
   - 2.2 $a_p := \mathsf{max}(a_p, i - \ell_q + 1)$;
   - 2.3 $s_p := \mathsf{min}(j \mid out_p[j] = \bot)$;

$p^2$: $\forall j \in \mathbb{N}_0 : out_p[j] \neq \bot \Rightarrow out_p[j] = in_q[j]\,\&(a_p > j - \ell_q)$

После выполнения $\mathbf{R}_p$:

- $in_q$ и $out_p[j]$ для всех $j$, кроме $i$, не изменяются
- Если перед (2) $out_p[i] \neq \bot$, то $out_p$ и $a_p$ не изменяются
- Если перед (2) $out_p[i] = \bot$, то:
  - Согласно $p^1$, после (1) верно $w = in_q[i]$
  - Значит, после (2.1) верно $out_p[i] = w = in_q[i]$
  - После (2.2) $a_p$ может только увеличиться, и согласно правой части присваивания, верно $a_p \geq i - \ell_q + 1$, то есть $a_p > i - \ell_q$

# Безопасность BSWP

Доказательство. *2.* $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

*Процедура* $\mathbf{R}_p$ (предусловие: очередь $Q_p$ непуста)

1. *receive*(**pack**, $\langle w, i\rangle$)
2. Если $out_p[i] = \bot$:
   - 2.1 $out_p[i] := w$;
   - 2.2 $a_p := \mathsf{max}(a_p, i - \ell_q + 1)$;
   - 2.3 $s_p := \mathsf{min}(j \mid out_p[j] = \bot)$;

$p^3$: $a_p \le s_q$

После выполнения $\mathbf{R}_p$:

- Значение $s_q$ не изменяется
- Если перед (2) $out_p[i] \neq \bot$, то и значение $a_p$ не изменяется
- Если перед (2) $out_p[i] = \bot$, то после (2.2):
  - Из $p^1$ следует $i < s_q + \ell_q$
  - Значит, $i - \ell_q + 1 < s_q + 1$, то есть $i - \ell_q + 1 \le s_q$
  - Если $a_p$ изменяется, то $a_p = i - \ell_q + 1 \le s_q$

# Безопасность BSWP

Доказательство. *2.* $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

*Процедура* $\mathbf{R}_p$ (предусловие: очередь $Q_p$ непуста)

1. *receive*(**pack**, $\langle w, i\rangle$)
2. Если $out_p[i] = \perp$:
   - 2.1 $out_p[i] := w$;
   - 2.2 $a_p := \max(a_p, i - \ell_q + 1)$;
   - 2.3 $s_p := \min(j \mid out_p[j] = \perp)$;

$q^0$: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, s_q - 1\} : out_q[i] \neq \perp$

Значения $s_q$ и $out_q$ не изменяются

$q^1$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\mathbf{pack}, \langle w, i\rangle) \in Q_q \Rightarrow w = in_p[i]\,\&(i < s_p + \ell_p)$

Значение $s_p$ не уменьшается, значения $Q_q$ и $in_p$ не изменяются

$q^2$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_q[i] \neq \perp \Rightarrow out_q[i] = in_p[i]\,\&(a_q > i - \ell_p)$

Значения $out_q$, $in_p$ и $a_q$ не изменяются

$q^3$: $a_q \leq s_p$

Значение $a_q$ не изменяется, $s_p$ — не уменьшается

# Безопасность BSWP

Доказательство. *2.* $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

*Процедура* $\mathbf{S}_p$ (предусловие: $a_p < s_p + \ell_p$)

1. Выбрать $i \in \mathbb{N}_0$: $a_p \le i < s_p + \ell_p$
2. $send(\mathbf{pack}, \langle in_p[i], i\rangle)$

*Процедура* $\mathbf{L}_p$ (предусловие: очередь $Q_p$ непуста)

1. $receive(\mathbf{pack}, \langle w, i\rangle)$

**Задача 1.** Завершить доказательство для этих двух процедур

▼

# Безопасность BSWP

**Теорема (безопасность BSWP). С.п. $S$ BSWP обладает свойством безопасности BSWP**

$$\forall x \in \mathfrak{R}(S) : \forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \in \{in_q[i], \perp\} \,\&\, out_q[i] \in \{in_p[i], \perp\}$$

Доказательство.

По последней лемме, $P_{BSWP}$ — инвариант BSWP

При этом из $P_{BSWP}$ следуют

- $p^2$ $(\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \neq \perp \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \,\&\, (a_p > i - \ell_q))$, из чего следует $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \in \{in_q[i], \perp\}$
- $q^2$ $(\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_q[i] \neq \perp \Rightarrow out_q[i] = in_p[i] \,\&\, (a_q > i - \ell_p))$, из чего следует $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_q[i] \in \{in_p[i], \perp\}$

Значит, из $P_{BSWP}$ следует
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \in \{in_q[i], \perp\} \,\&\, out_q[i] \in \{in_p[i], \perp\}$

Осталось только применить теорему о проверке безопасности с.п. ▼

# Живость BSWP

К сожалению, если не наложить на устройство и выполнения BSWP дополнительных ограничений, то он не будет обладать свойством живости

**Ограничения на устройство протокола**:

- Все элементы $in_p$ и $in_q$ отличны от $\perp$
- $\ell_p, \ell_q \in \mathbb{N}_0$, $\ell_p + \ell_q > 0$

**Ограничения справедливости**:

F1 Если бесконечно часто возникает возможность отправки пакета, то этот пакет будет отправляться бесконечно часто

F2 Если пакет отправляется бесконечно часто, то он и принимается бесконечно часто

BSWP с этими ограничениями будем обозначать BSWP*

Оказывается, что этих ограничений достаточно для обеспечения живости протокола

# Живость BSWP

**Лемма (об узости окна). В любой достижимой конфигурации BSWP* верно:**

$$s_p - \ell_q \le a_p \le s_q \le a_q + \ell_p \le s_p + \ell_p$$

Доказательство.

По теореме о безопасности инварианта, любая достижимая конфигурация BSWP* обладает свойством $P_{BSWP}$

Неравенство $s_p - \ell_q \le a_p$ следует из

- $p^0$ $(\forall i \in \{0, 1, \ldots, s_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp)$ и
- $p^2$ $(\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \neq \perp \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \,\&\, (a_p > i - \ell_q))$

Неравенство $a_p \le s_q$ — это условие $p^3$

Неравенство $s_q \le a_q + \ell_p$ (то есть $s_q - \ell_p \le a_q$) следует из $q^0$ и $q^2$

Неравенство $a_q + \ell_p \le s_p + \ell_p$ (то есть $a_q \le s_p$) — это условие $q^3$ ▼

Таким образом, створки $s_q$ и $a_q + \ell_p$ окна узла $q$ отстоят друг от друга не более чем на $\ell_p + \ell_q$ (аналогично — створки окна узла $p$)

# Живость BSWP

**Лемма (об открытости окна). В любой достижимой конфигурации BSWP* выполнено хотя бы одно из предусловий процедур отправки пакета $\mathbf{S}_p$ ($a_p < s_p + \ell_p$), $\mathbf{S}_q$ ($a_q < s_q + \ell_q$)**

Доказательство.

По лемме об узости окна, верны неравенства

$$s_p - \ell_q \le a_p \le s_q \le a_q + \ell_p \le s_p + \ell_p$$

В частности, это означает, что $a_p \le s_q$ и $a_q + \ell_p \le s_p + \ell_p$

То есть $a_p \le s_q$ и $a_q \le s_p$

Кроме того, согласно ограничению $\ell_p + \ell_q > 0$, верно $s_p - \ell_q < s_p + \ell_p$

Следовательно, хотя бы одно из неравенств леммы об узости окна является строгим

Последнее означает, в частности, что $s_p - \ell_q < s_q \vee s_q < s_p + \ell_p$

То есть $s_p < s_q + \ell_q \vee s_q < s_p + \ell_p$

Следовательно, верно $a_p \le s_q < s_p + \ell_p \vee a_q \le s_p < s_q + \ell_q$ ▼

# Живость BSWP

**Теорема (живость BSWP).** **С.п. $S$ BSWP* в условиях справедливости (F1) и (F2) обладает свойством живости BSWP**

$\forall \pi \in \Pi(S) : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \bot \,\&\, out_q \neq \bot$

Доказательство.

Согласно $p^0$ $(\forall i \in \{0, 1, \ldots, s_p - 1\} : out_p[i] \neq \bot)$, $q^0$ $(\forall i \in \{0, 1, \ldots, s_q - 1\} : out_q[i] \neq \bot)$ и безопасности BSWP, достаточно показать, что каждое из значений $s_p$, $s_q$ увеличивается бесконечно часто

*Предположим от противного*, что это не так

По лемме об узости окна, верны неравенства $s_p - \ell_q \leq s_q \leq s_p + \ell_p$ и $s_q - \ell_p \leq s_p \leq s_q + \ell_q$, а значит, значения обеих переменных $s_p$, $s_q$ увеличиваются лишь конечное число раз

Пусть $k_p$, $k_q$ — наибольшие значения $s_p$ и $s_q$ соответственно

# Живость BSWP

**Теорема (живость BSWP).** **С.п. $S$ BSWP* в условиях справедливости (F1) и (F2) обладает свойством живости BSWP**

$\forall \pi \in \Pi(S) : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \perp \,\&\, out_q \neq \perp$

Доказательство.

По лемме об открытости окна, бесконечно часто допустимо действие отправления хотя бы одного из пакетов (**pack**, $\langle in_p[k_q], k_q \rangle$), (**pack**, $\langle in_q[k_p], k_p \rangle$)

Пусть, для ясности, это пакет (**pack**, $\langle in_q[k_p], k_p \rangle$)

Согласно (F1), этот пакет отправляется бесконечно часто

Согласно (F2), этот пакет принимается бесконечно часто

По устройству протокола и ограничению $in_q[k_p] \neq \perp$, приём этого сообщения приводит к увеличению значения $s_p$ (*противоречие*) ▼

# Живость BSWP

**Задача 2.** Покажите, что последняя теорема перестаёт быть верной, если убрать хотя бы одно из ограничений (F1), (F2), и для этого приведите соответствующий «неживой» сценарий выполнения протокола

**Задача 3.** Докажите, что если в BSWP* выполняется равенство $\ell_p + \ell_q = 1$ и начальные значения $a_p$ и $a_q$ заменить соответственно на $-\ell_q$ и $-\ell_p$, то во всех достижимых конфигурациях выполняются равенства $a_p + \ell_q = s_p$ и $a_q + \ell_p = s_q$

**Задача 4.** Насколько существенны для свойств (а) безопасности и (б) живости BSWP*

- невозможность дублирования пакетов в канале связи и
- надёжность узлов $p$, $q$?